

KHOA TOÁN - TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2



TOÁN HỌC & Sinh viên

TẠP CHÍ DÀNH CHO SINH VIÊN KHOA TOÁN TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

5

THÁNG 3
2021



THE
ABEL
PRIZE
2021

László Lovász & Avi Wigderson



Tháng
THANH 2021 NIÊN

TUỔI TRÉ KHOA TOÁN
TỰ HÀO TRUYỀN THỐNG ĐOÀN TNCS HỒ CHÍ MINH



TOÁN HỌC

Sinh viên

TỔNG BIÊN TẬP

TS. TRẦN VĂN BẰNG

PHÓ TỔNG BIÊN TẬP

PGS.TS. NGUYỄN VĂN TUYỀN

TS. NGUYỄN THỊ KIỀU NGÀ

BAN BIÊN TẬP

Trưởng ban

ThS. HÀ TUẤN DŨNG

Phó Trưởng ban

CN. NGUYỄN QUANG CHUYÊN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

ThS. Trần Thị Vân Anh

TS. Nguyễn Trung Dũng

TS. Đào Thị Hoa

TS. Phạm Thị Hồng Hạnh

ThS. Đỗ Văn Kiên

ThS. Phan Văn Lộc

ThS. Phạm Thanh Tâm

ThS. Trần Thị Thu

ThS. Phạm Anh Vinh

TRONG SỐ NÀY

LỊCH SỬ TOÁN HỌC

Tr 1

Giải thưởng Abel vinh danh sự kết hợp của toán học và khoa học máy tính.....Trang 1

DÀNH CHO TOÁN SƠ CẤP

Tr 5

Nguyễn Văn Đạt - Ứng dụng của Nguyên lý Drichlet trong các bài toán chứng minh bất đẳng thức...Trang 5

Quách Đăng Duy, Nguyễn Thanh Nga, Bùi Ngọc Diệp - Phương trình hàm Cauchy và một số vấn đề

liên quan.....Trang 26

Nguyễn Văn Đạt - Nguyên lý bao hàm và loại trừ sử dụng trong các bài toán đếm.....Trang 52

CHUYÊN ĐỀ TOÁN CAO CẤP

Tr 64

Nguyễn Thị Giang, Vũ Thị Thanh Hằng - Cực trị có điều kiện và ứng dụng.....Trang 64

Nguyễn Thị Thương Huyền, Nguyễn Thị Thu Huyền, Nguyễn Thị Lan, Chu Thị Bích Thảo - Chéo hóa

ma trận và một vài ứng dụng.....Trang 85

Nguyễn Thị Hương - Dãy Farey và ứng dụng.....Trang 97

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

Tr 112

Phạm Tú Uyên, Nguyễn Thị Hà, Nguyễn Thùy Dung - Vận dụng mô hình hóa Toán học trong

dạy học Bài toán giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số.....Trang 112

NEWS

Bìa 3, 4

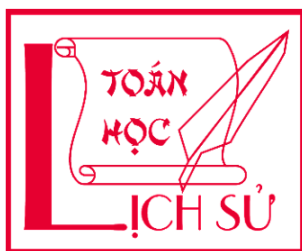
ĐỊA CHỈ NHẬN BÀI

KHOA TOÁN - TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

Phòng 2.10 - Nhà A4, số 32, đường Nguyễn Văn Linh, phường Xuân Hòa, thành phố Phúc Yên, tỉnh Vĩnh Phúc.

Điện thoại: 0965174594 - Email: hatuandung@hpu2.edu.vn - Website: <http://khoatoan.hpu2.edu.vn/>

TẠP CHÍ LƯU HÀNH NỘI BỘ KHOA TOÁN - TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2



GIẢI THƯỞNG ABEL VINH DANH SỰ KẾT HỢP CỦA TOÁN HỌC VÀ KHOA HỌC MÁY TÍNH

Theo Tạp chí Tia sáng

Công trình của László Lovász và Avi Wigderson, những người thắng giải Abel 2021, đã góp phần tạo ra những ứng dụng từ an ninh mạng đến khoa học mạng lưới.

1. GIẢI ABEL 2021

Hai nhà tiên phong của lý thuyết tính toán đã thắng giải Abel 2021, một trong những giải thưởng danh giá nhất của toán học.

Nhà toán học Hungary László Lovász và nhà khoa học máy tính Avi Wigderson sẽ cùng chia sẻ giải thưởng trị giá 7,5 triệu kroner Na Uy (tương đương 886.600 USD) “cho những đóng góp mang tính nền tảng của họ cho lý thuyết khoa học máy tính và toán rời rạc, cũng như vai trò dẫn đầu của họ trong việc đưa những lĩnh vực này trở thành trung tâm của toán học hiện đại”, Viện Hàn lâm Khoa học Na Uy cho biết như vậy trong một thông báo vào ngày 17/3/2021.



László Lovász (trái) và Avi Wigderson cùng nhận giải Abel 2021 (nguồn: AbelPrizea).

Avi Wigderson, hiện làm việc tại Viện nghiên cứu Tiên tiến (IAS) ở Princeton, New Jersey, nói với Nature rằng giải thưởng này đã tôn vinh lý thuyết tính toán chứ không chỉ cho mỗi phần nghiên cứu của ông. “Tôi nghĩ nó vô cùng có ý nghĩa với lĩnh vực khoa học này”, ông nói.

“Ngày nay ngày càng khó khăn trong việc phân biệt toán học thuần túy và toán học ứng dụng-và tôi nghĩ đó là một điều tốt”, Lovász, hiện làm việc tại trường đại học Eötvös Loránd ở Budapest, nói.

Các thuật toán – vốn bao gồm những phương pháp đơn giản mà trẻ em học ở trường, như phép chia số dài – từng là trung tâm của toán học ít nhất là từ thời kỳ Hy Lạp cổ đại. Nhưng kể từ khi xuất hiện máy tính vào thế kỷ 20, tầm quan trọng trong nghiên cứu đã thay đổi từ câu hỏi “một thuật toán có thể giải quyết bài toán này không?” thành “ít nhất là về nguyên tắc, một thuật toán có thể giải quyết bài toán này trên một máy tính thông thường và trong một khoảng thời gian hợp lý không?”

Lovász và Wigderson đóng vai trò trung tâm trong những phát triển đó, Peter Sarnak, một nhà lý thuyết số tại IAS, nói. “Lý thuyết về tính phức hợp của các thuật toán và nghiên cứu về tốc độ giải các bài toán đã được phát triển trong những năm 1960 và 1970, và cả hai người họ đều chứng tỏ được rằng mình là những người đứng đầu”.

2. TỪ TOÁN HỌC ĐẾN TÍNH TOÁN

Lovász sinh năm 1948 tại Budapest, lớn lên trong một môi trường mà những đứa trẻ tài năng được khuyến khích giải những bài toán khó. Paul Erdős, một trong những nhà toán học xuất sắc của kỷ nguyên hiện đại, đã truyền cảm hứng cho Lovász. Công việc nghiên cứu của Erdős tập trung vào toán học của các đối tượng rời rạc và sự liên hệ giữa chúng – ví dụ như các nút trong một mạng lưới – hơn là vào các biến liên tục vốn đặc trưng trong nhiều lĩnh vực như hình học, nhà toán học Péter Pál Pálffy tại Viện nghiên cứu toán học Alfréd Rényi ở Budapest nói.



Nhà toán học László Lovász (nguồn: AbelPrizea).

Lovász bắt đầu sự nghiệp tại thời điểm khi các chủ đề trong toán rời rạc như lý thuyết mạng lưới – từng bị các nhà toán học “thuần túy” coi thường – trở nên quan trọng cả trong các lĩnh vực khác của toán học và ứng dụng như phân tích dữ liệu lớn. Ông quan tâm đến nghiên cứu cơ bản cũng như những ứng dụng của nó, và làm việc toàn thời gian cho Microsoft trong vòng bảy năm khi giữ các vị trí nghiên cứu học thuật. Ông đã giải quyết những bài toán lớn về lý thuyết toán học của mạng lưới như tính toán số các cách có thể để tô màu các điểm nút mà vẫn đảm bảo cho hai điểm cạnh nhau luôn luôn có màu sắc khác nhau.

Một trong những kết quả xuất sắc nhất của Lovász là một thuật toán mà ông tạo ra cùng với hai nhà lý thuyết số Hà Lan, hai anh em Arjen và Hendrik Lenstra. Thuật toán mang tên LLL này đã chia một vectơ lớn được tạo ra từ những số nguyên thành tổng của những vectơ ngắn nhất có thể của dạng này. Nó có nhiều ứng dụng trong nhiều lĩnh vực của toán học thuần túy và trở thành cốt lõi với nghiên cứu về mã hóa dữ liệu. Các khóa mật mã được thiết lập trên cơ sở các vectơ nguyên được xem là có nhiều hứa hẹn cho an ninh mạng tương lai bởi vì không giống như những khóa mật mã thường được sử dụng trong truyền thông hiện nay, nó được cho là không dễ bị phá bởi các máy tính lượng tử.

Lovász là chủ tịch Hội toán học quốc tế từ năm 2007 đến 2010. Ông cũng là chủ tịch Viện Hàn lâm KH Hungary từ năm 2014 đến 2020, và trong suốt những năm đó đã đi đầu trong một nỗ lực táo bạo nhưng cuối cùng thất bại - nỗ lực ngăn cản chính phủ Hungary tiếp quản các viện nghiên cứu của Viện hàn lâm. Ông và nhiều nhà khoa học khác cho rằng điều này có thể làm giảm tính độc lập của các nhà nghiên cứu.

3. TỪ TÍNH TOÁN ĐẾN TOÁN HỌC

Wigderson sinh ra tại Haifa, Israel năm 1956. Ông nghiên cứu tại Israel và Mỹ và làm việc tại nhiều cơ sở nghiên cứu trước khi chuyển tới IAS vào năm 1999, nơi ông làm việc từ đó đến nay. Giải Abel mà ông nhận được ghi nhận đóng góp của ông cho nhiều lĩnh vực thực tiễn của khoa học máy tính, trong đó ông “tấn công” vào bất kỳ bài toán nào với các công cụ toán học bất kỳ mà ông tìm thấy, ngay cả công cụ từ các lĩnh vực xa xôi. Đam mê của Wigderson cho lĩnh vực nghiên cứu của mình rất dễ “lây nhiễm” cho người khác, Sarnak nói. “Khi ông ấy nói với anh, anh hoàn toàn cảm thấy là ‘Chúa ơi, tốt hơn là mình nên gác lại những gì mình đang làm và bắt đầu tìm hiểu về điều đó’”.

Một trong những thành công nổi tiếng bậc nhất của Wigderson là sự phân loại vai trò của ngẫu nhiên trong tính toán. Trong nhiều trường hợp, như tìm kiếm đường thoát khỏi một mê cung, thì việc tung một đồng xu ngẫu nhiên cũng có thể là một thuật toán giúp tìm ra đường nhanh chóng, mặc dù các lý do vì sao tìm được thì lại không rõ ràng. “Rất nhiều chương trình chạy nhanh hơn nếu như anh cho phép chúng thực hiện sự lựa chọn ngẫu nhiên đó”, Sarnak nói.

Cùng với những cộng sự trong những năm 1990, Wigderson chứng tỏ là nếu việc sử dụng một thuật toán ngẫu nhiên dường như đạt hiệu quả thì phải tồn tại một thuật toán phi

ngẫu nhiên gần như hiệu quả. Điều này đem lại một sự cam đoan về mặt lý thuyết rằng các thuật toán ngẫu nhiên thực sự tìm được các giải pháp đúng.

Một công trình lớn khác của Wigderson đang ngày một trở nên phù hợp với nền kinh tế thông tin. Nó bao hàm giao thức phi kiến thức, một cách cho phép người ta xác nhận được sự đúng đắn của một tuyên bố mà không cần tiết lộ bất kỳ thông tin nào về những gì tuyên bố đó nói ra.



Nhà toán học Avi Wigderson (nguồn: AbelPrizea).

Giao thức phi kiến thức là trung tâm trong những loại tiền số như Bitcoin, và có thể giúp xác định được danh tính của một cá nhân. Bằng việc trả lời những câu hỏi của người thẩm tra, người ta có thể đưa ra một giao thức phi kiến thức có mật khẩu chính xác, ví dụ như vậy, mà không cần tiết lộ chính mật khẩu đó. Wigderson và cộng sự đã chứng minh vào năm 1991 là tất cả những tuyên bố toán học về bản chất có thể được diễn dịch theo một cách cho phép một giao thức phi kiến thức – “có thể là điều gây ngạc nhiên nhất, nghịch lý nhất” của những kết quả nghiên cứu, Wigderson nói.

Kể từ khi thành lập giải Abel vào năm 2003, Lovász là người Hungary thứ ba và Wigderson là người Israel thứ nhì thắng giải. Với ngoại lệ của Karen Keskylla Uhlenbeck vào năm 2019, mọi người thắng giải này đều là nam.

Thanh Phương *tổng hợp*
TS. Nguyễn Quang (ĐH Duy Tân) *hiệu đính*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] <https://www.nature.com/articles/d41586-021-00694-9>.

[2] <https://www.abelprize.no/>.



ỨNG DỤNG CỦA NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

*Nguyễn Văn Đạt - K43A SPT
Khoa Toán, ĐHSP Hà Nội 2*

Tóm tắt. Bất đẳng thức là một trong những chủ đề khó nhưng vô cùng hấp dẫn của Toán Sơ cấp. Chúng ta có nhiều phương pháp để chứng minh bất đẳng thức như: “phương pháp dồn biến, phương pháp dùng hệ số bất định, phương pháp quy nạp tổng quát, phương pháp sử dụng các bất đẳng thức cổ điển...” Trong bài viết này, chúng tôi sẽ giới thiệu tới bạn đọc một phương pháp thú vị để chứng minh các bài toán bất đẳng thức, đó là phương pháp ứng dụng nguyên lý Dirichlet. Đây là nguyên lý thường được biết tới với tên gọi là “nguyên lý ngăn kéo”, và được đề xuất lần đầu tiên bởi nhà toán học người Đức, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet vào năm 1834. Nguyên lý này được phát biểu như sau: **“Nếu chúng ta đặt $n + 1$ đồ vật vào n ngăn kéo thì sẽ có một ngăn kéo chứa ít nhất hai đồ vật”**. Nội dung của nguyên lý này hết sức đơn giản và dễ hiểu song nó lại là một công cụ hiệu quả và sâu sắc để chứng minh các bài toán về bất đẳng thức với các cách tiếp cận độc đáo.

1. MỞ ĐẦU

1.1. Đôi nét về nhà toán học Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Nhà toán học Dirichlet tên đầy đủ là Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, sinh ra tại Duren, vùng đất nằm giữa Cologne và Aachen (nay thuộc Cộng hòa Liên bang Đức) vào ngày 13 tháng 2 năm 1805. Ông là người con thứ bảy và cũng là con út của Johann Arnold Lejeune Dirichlet (1762-1837) cùng vợ là Anna Elisabeth (1768-1868). Cha của Dirichlet là một bưu điện viên, nhà lái buôn và cũng ủy viên hội đồng thành phố ở Duren với chức danh là chính ủy Poste.

Dirichlet bắt đầu học tiểu học tại một trường Tư thục ở quê nhà. Ở đó, ông đã được hướng dẫn học tiếng Latin, đây được coi như là một bước chuẩn bị cho quá trình học tập ở trường trung học, nơi mà việc nghiên cứu các ngôn ngữ cổ xưa như là một phần thiết yếu của việc đào tạo. Tài năng toán học Dirichlet bộc lộ từ rất sớm. Khi chưa đầy 12 tuổi ông đã sử dụng những đồng tiền mà bản thân tự kiếm được để mua sách về toán học, và khi họ nói rằng ông không thể hiểu chúng, ông đã trả lời rằng, dù sao đi nữa rằng ông cũng sẽ đọc chúng cho đến khi thực sự hiểu mọi vấn đề mà bản thân đang tìm hiểu. Gia đình của Dirichlet sống dựa chủ yếu vào việc buôn bán nên bố mẹ Dirichlet đều kì vọng sau này ông trở thành một thương gia. Tuy nhiên, Dirichlet đã phản đối điều này và ông mong muốn có thể tiếp tục được tiếp nhận kiến thức khoa học ở các bậc học cao hơn. Bố mẹ của Dirichlet

đã đồng ý và gửi ông tới trường trung học ở Bonn năm 1817. Sau hai năm Dirichlet chuyển tới trường trung học Jesuiter tại Cologne. Tại đây, ông đã có những sự tiến bộ đáng kính ngạc trong Toán học dưới sự hướng dẫn của nhà bác học nổi tiếng bậc nhất lúc bấy giờ Georg Simon Ohm (1789-1854), người với những phát hiện về định luật Ohm (1826) trong điện học. Dưới sự hướng dẫn tận tình của Ohm cùng với sự chăm chỉ của bản thân, Dirichlet đã có một nền tảng kiến thức rộng lớn về toán học trong giai đoạn này. Đến năm 16 tuổi, Dirichlet đã hoàn thành xong các chương trình ở trường trung học và sẵn sàng vào đại học. Tuy nhiên, nhận thấy nền giáo dục ở các trường đại học Đức vào thời điểm này chưa thật sự cao nên ông đã quyết định học ở Paris. Một điều thú vị là vài chục năm sau, Đức trở thành một trong những trung tâm giáo dục đại học tốt nhất thế giới và Dirichlet chính là người sẽ đóng vai trò chủ chốt cho sự thay đổi này.



Nhà toán học Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) (nguồn: Wikipedia).

Dirichlet lên đường sang Pháp, với hành trang là cuốn sách “*Disquisitiones Arithmeticae*” (một cuốn sách chuyên khảo về Lý thuyết số) của hoàng tử của các nhà toán học, Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Đây là tác phẩm đã mang tới rất nhiều cảm hứng cho ông trên con đường nghiên cứu toán. Dưới sự giúp đỡ của bố mẹ, ông đã tới Paris vào tháng 5 năm 1822 để học toán tại *Collège de France* và *Faculté des Sciences*. Trong thời đó, ông đã tham dự bài giảng của các giáo sư nổi tiếng của Pháp thời bấy giờ như S. F. Lacroix (1765-1843), J. -B. Biot (1774-1862), J. N. P. Hachette (1769-1834), và L. B. Francoeur (1773-1849). Sau một năm sống yên tĩnh trong sự tách biệt, chỉ tận tâm tới những sự nghiên cứu của mình, cuộc sống của Dirichlet đã có một sự thay đổi cơ bản vào mùa hè năm 1823. Tướng Maximilien Sébastien Foy (1775-1825) đang tìm một gia sư riêng để dạy ngôn ngữ Đức và văn học cho các con của mình. Tướng Foy từng là một nhân vật quan trọng trong quân đội của Napoléon và đã nghỉ hưu sau thất bại của Napoléon tại trận đánh Waterloo. Năm 1819, ông được bầu vào Hạ viện, nơi ông là nhà lãnh đạo của phe đối lập cho đến khi

qua đời. Dưới sự giới thiệu của Larchet de Charmont, một người bạn cũ của tướng Foy và người bạn của cha mẹ Dirichlet, ông đã được giới thiệu với gia đình Foy và ông đã nhận được công việc gia sư với mức lương tốt, để ông không còn phải phụ thuộc vào sự hỗ trợ tài chính của cha mẹ. Dirichlet được tướng Foy đối xử rất tốt, ông được trả lương cao và được đối xử như một thành viên trong gia đình.

Công trình khoa học đầu tiên của Dirichlet mang tên “*Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré*”, ngay lập tức đã tạo tiếng vang lớn trong cộng đồng Toán học châu Âu lúc bấy giờ. Bài báo đã đưa ra chứng minh cho một trường hợp đặc biệt của định lý cuối cùng của Fermat—định lý nổi tiếng nhất trong ngành lý thuyết số. Định lý này được phát biểu như sau: “Không tồn tại các số nguyên x, y, z khác 0 sao cho phương trình $x^n + y^n = z^n$ với n là số nguyên dương lớn hơn 2.” Trường hợp $n = 3$ và $n = 4$ đã được chứng minh bởi Euler và Fermat. Dirichlet đã cung cấp chứng minh cho một trường hợp đặc biệt của định lý trên với $n = 5$. Ông đã trình bày các kết quả trong bài báo của mình tại Học viện Paris vào tháng 7 năm 1825. Nhà toán học Adrien-Marie Legendre (1752-1833) được chỉ định làm phản biện cho bài báo của ông. Từ các kết quả của ông, Legendre đã hoàn tất chứng minh định lý lớn Fermat trong trường hợp $n = 5$. Trên thực tế, Dirichlet đã có thể hoàn thành chứng minh của riêng mình về trường hợp $n = 5$ với các lập luận được mở rộng từ các kết chứng minh trong bài báo đầu tiên của ông. Điều đáng chú ý là sau này, ông đã đưa ra chứng minh vô cùng đẹp cho định lý nổi tiếng trên trong trường hợp $n = 14$.

34.

Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré.

(Par Mr. *Lejeune Dirichlet*, professeur en mathématiques.)

Lu à l'Académie royale des sciences (Institut de France), le 11. Juillet 1825, par l'auteur.

(D'après le rapport de MM. Lacroix et Legendre, ce mémoire a été approuvé, et doit être imprimé dans le recueil des mémoires de savans étrangers *).)

On sait que la théorie des équations indéterminées des degrés supérieurs au second, est encore très peu avancée; il est vrai qu'il y a une infinité d'équations de tous les degrés dont on peut démontrer l'impossibilité en faisant voir que quelles que soient les valeurs que l'on attribue aux indéterminées, les deux membres de l'équation proposée ne peuvent jamais donner le même reste lorsqu'on les divise par un certain nombre ou module; mais lorsqu'une équation ne peut pas être traitée par ce moyen, il devient difficile de prouver qu'elle est impossible, et on n'y est parvenu, jusqu'à présent, que pour un très petit nombre d'équations.

Bài báo khoa học đầu tiên của Dirichlet (nguồn: [14]).

Vào ngày 28 tháng 11 năm 1825, tướng Foy qua đời. Sự kiện này đã khiến Dirichlet quyết định trở về Đức. Tuy nhiên, có một vấn đề đối với Dirichlet vì để giảng dạy ở một trường đại học Đức, ông cần một bằng “Tiến sĩ Khoa học (Habilitation)”. Mặc dù Dirichlet có thể dễ dàng nộp luận án Tiến sĩ Khoa học, nhưng điều này không được phép vì ông không có

bằng Tiến sĩ, cũng như không thể nói tiếng Latinh, một yêu cầu vào đầu thế kỷ XIX. Vấn đề này đã được giải quyết một cách thâu đáo bằng việc Đại học Cologne trao cho Dirichlet bằng tiến sĩ danh dự, do đó cho phép ông nộp luận án Tiến sĩ khoa học của mình về đa thức với một loại ước số nguyên tố đặc biệt cho Đại học Breslau (Silesia, bây giờ là Wrocław, Ba Lan). Từ năm 1827, Dirichlet giảng dạy tại Đại học Breslau. Nhưng chỉ sau đó một năm, ông chuyển đến công tác Trường Cao đẳng Quân sự. Ngay sau đó, ông được bổ nhiệm làm giáo sư tại Đại học Berlin, nơi ông vẫn làm việc từ năm 1828 đến năm 1855. Ông vẫn giữ chức vụ của mình trong Trường Cao đẳng Quân sự, công việc giảng dạy và các nhiệm vụ hành chính khác khiến cho cuộc sống của ông có phần ngột ngạt. Dirichlet bắt đầu độ chín trong sự nghiệp toán học của mình chính tại Berlin. Nhiều công trình toán học xuất sắc của ông đã được công bố trong giai đoạn này. Năm 1855, khi Gauss mất, Dirichlet chuyển tới Đại học Göttingen, Đức. Ba năm sau đó, ông tới Montreux, Thụy Sĩ. Trong khi ở đây, Dirichlet bị đau tim và được đưa về quê nhà. Ông qua đời vào ngày 05 tháng 05 năm 1859.



Nhà Vật lí học Georg Simon Ohm (1789-1854) (nguồn: Wikipedia).

Dirichlet đã có những đóng góp to lớn cho toán học. Ông có nhiều công trình khoa học có giá trị quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học như Lý thuyết số, Giải tích, Hình học ... Phần trên của bài viết đã đề cập tới những đóng góp của ông cho Định lý cuối cùng của Fermat được thực hiện vào năm 1825. Trong khoảng thời gian này, Dirichlet cũng đã xuất bản một bài báo lấy cảm hứng từ công trình của Gauss về luật thuật nghịch toàn phương. Năm 1837, ông đã chứng minh được phỏng đoán về số nguyên tố của Gauss: “Nếu a, b là hai số nguyên tố cùng nhau thì sẽ có vô hạn số nguyên tố có dạng $ax + b$ với $x > 0$ ”. Lý thuyết số giải tích có thể được cho là bắt đầu với công trình của Dirichlet, và đặc biệt là với bài báo của Dirichlet vào năm 1837 về sự tồn tại của các số nguyên tố trong một cấp số cộng nhất định. Ngay sau khi xuất bản bài báo này, Dirichlet đã xuất bản thêm

hai bài báo nữa về Lý thuyết số giải tích, một bài vào năm 1838 và bài tiếp theo vào năm sau. Những bài báo này giới thiệu chuỗi Dirichlet cũng như một vài khái niệm và kiến thức cơ sở cho hướng đi mới mẻ này của Lý thuyết số. Năm 1837, ông đã đưa ra định nghĩa hiện đại của hàm số, mà chúng ta vẫn sử dụng đến tận ngày nay: “*Nếu biến y liên quan tới biến x với bất kì giá trị số được gán cho x , có một quy tắc tương ứng với mỗi giá trị duy nhất của y được xác định thì khi đó y được gọi là một hàm số của biến độc lập x .*”

Trong cơ học, ông nghiên cứu trạng thái cân bằng của một số hệ động lực và lý thuyết thế vị. Những nghiên cứu này bắt đầu vào năm 1839 với các bài báo đưa ra phương pháp tính tích phân bội và Dirichlet đã áp dụng điều này vào bài toán về lực hấp dẫn của một ellipsoid đối với các điểm cả bên trong và bên ngoài. Sau đó, ông quan tâm tới bài toán chứng minh tính ổn định của hệ mặt trời thông qua phương trình các hàm điều hòa. Công việc này đã đưa Dirichlet đến vấn đề nghiên cứu nghiệm của một phương trình đạo hàm riêng với các điều kiện biên cho trước. Sau này, một trong những bài toán chủ chốt trong phương trình đạo hàm riêng mang tên ông, “*bài toán biên Dirichlet*”. Ông cũng nổi tiếng với các bài báo về điều kiện hội tụ của chuỗi lượng giác và việc sử dụng chuỗi để biểu diễn các hàm tùy ý. Trước đó, những chuỗi này đã được Fourier sử dụng hiệu quả trong việc giải các phương trình vi phân. Công trình về các chuỗi lượng giác của Dirichlet được xuất bản trên Tạp chí Crelle năm 1828. Về cuộc đời và các công trình của Dirichlet, chúng tôi giới thiệu bạn đọc tới tài liệu tham khảo [6] và các bài báo liên quan trong đó.

1.2. Nguyên lý Dirichlet và một số ví dụ

Với số thực θ tùy ý và các số nguyên dương Q , tồn tại số nguyên p và q với $0 < q \leq Q$ thỏa mãn

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qQ}.$$

Đây là một trong những định lý kinh điển trong lĩnh vực xấp xỉ Diophantine của ngành Lý thuyết số. Trong các bài báo [3] và [4], để chứng minh phiên bản nhiều chiều và phiên bản phức của định lý nói trên, Dirichlet đã đề xuất nguyên lý:

“Nếu chúng ta đặt $n + 1$ đồ vật vào n ngăn kéo thì sẽ có một ngăn kéo chứa ít nhất hai đồ vật”.

Kể từ đó, nguyên lý này thường được biết đến với tên gọi là nguyên lý ngăn kéo Dirichlet hay ngắn gọn là nguyên lý Dirichlet. Đây là một công cụ rất hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả sâu sắc trong toán học. Nguyên lý này trong nhiều trường hợp giúp người ta dễ dàng chứng minh được sự tồn tại mà không đưa ra được phương pháp tìm được vật cụ thể. Bây giờ, chúng ta sẽ đến với chứng minh nguyên lý Dirichlet bằng việc sử dụng phương pháp phản chứng.

Chứng minh nguyên lý Dirichlet. Giả sử tất cả các ngăn kéo chỉ có 1 đồ vật thì ta mới đặt được n đồ vật, trái với giả thiết là có $n + 1$ vật cần phải đặt vào n ngăn kéo. Do đó điều giả sử là sai. Vì vậy phải có một ngăn kéo chứa ít nhất hai đồ vật. Nguyên lý được chứng minh.

Cả phát biểu và chứng minh của nguyên lý này là vô cùng đơn giản. Tuy nhiên nó có những ứng dụng hết sức quan trọng, bao trùm lên nhiều ngành của Toán học, đặc biệt là Toán rời rạc. Tiếp theo, chúng tôi sẽ trình bày tới bạn đọc hai ví dụ để minh họa cho những ứng dụng của nguyên lý Dirichlet.

Ví dụ 1.1. Năm 1995 để kỷ niệm 20 năm ngày giải phóng Miền Nam, tại một thành phố người ta tổ chức buổi lễ gặp mặt những người 20 tuổi. Ngày 30 tháng 4 năm đó, trong một buổi gặp mặt có 400 thanh niên. Chứng minh rằng có ít nhất 2 người trong số người tới dự có cùng chung một ngày sinh.

Lời giải. Năm 1995 có 365 ngày. Chúng ta coi mỗi ngày như một “ngăn kéo” và đánh số từ 1 đến 365 (ngăn kéo cuối cùng là ngày 31 tháng 12 năm 1995). Chúng ta “đặt” những thanh niên có ngày sinh tương ứng các ngăn kéo đó. Nhưng số thanh niên đến dự lễ lớn hơn số ngăn kéo, theo Nguyên lý Dirichlet có ít nhất hai người được đặt vào cùng một ngăn kéo. Điều đó có nghĩa là họ sinh cùng một ngày.

Ví dụ 1.2. Trong một khối lập phương có cạnh 1 nhốt 2001 con ruồi. Chứng minh rằng luôn có ba con được bao bởi hình cầu bán kính $\frac{1}{11}$.

Lời giải. Ta chia khối lập phương cạnh 1 thành 1000 khối lập phương nhỏ cạnh 0,1. Đường chéo chính lớn nhất của khối lập phương nhỏ bằng $\sqrt{3} \cdot 0,1$. Vì thế nó nằm trong hình cầu bán kính $\sqrt{3} \cdot 0,05$. Chú ý rằng

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \cdot 0,05 &< 1,8 \cdot 0,05 \\ &= 0,09 < \frac{1}{11},\end{aligned}$$

do đó khối lập phương nằm trong hình cầu bán kính $\frac{1}{11}$. Vì số ruồi là 2001, còn số khối lập phương nhỏ là 1000, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một khối lập phương nhỏ chứa 3 con ruồi, hay nói cách khác chúng được nhốt trong hình cầu bán kính $\frac{1}{11}$.

Trong phần tiếp theo của bài viết này, chúng tôi sẽ trình bày một số mệnh đề là hệ quả trực tiếp của nguyên lý Dirichlet và chúng đóng vai trò quan trọng chứng việc chứng minh bất đẳng thức, đặc biệt là một lớp các bất đẳng thức đối xứng ba biến. Những ứng dụng của các mệnh đề này thông qua các bài toán bất đẳng thức xuất hiện trong các kỳ thi Olympic Toán cũng được trình bày trong phần này. Các bài tập tự luyện dành cho bạn đọc sẽ được trình bày ở phần cuối của bài viết.

2. ỨNG DỤNG CỦA NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Với một số thực bất kỳ, nó chỉ có thể là số thực âm hoặc số thực không âm. Vì vậy, từ nguyên lý Dirichlet, chúng ta thu được một mệnh đề sau.

Mệnh đề 2.1. Trong 3 số thực bất kỳ a, b, c luôn tìm được hai số có tích không âm.

Đây là mệnh đề rất quan trọng để chứng minh bất đẳng thức. Để áp dụng được mệnh đề trên, với xuất phát điểm là ta cần xác định “điểm rơi” (tức là đẳng thức của bài toán). Chúng tôi xin trình bày tới bạn đọc “ý tưởng chính” trong các bài toán chứng minh bất đẳng thức có sử dụng Mệnh đề 2.1.

Ý tưởng 1:

i) Ta tìm điều kiện xảy ra dấu đẳng thức của bài toán, giả sử

$$a = b = c = k.$$

ii) Theo Mệnh đề 2.1, trong ba số $(a - k)$, $(b - k)$, $(c - k)$ tồn tại hai số cùng dấu. Không mất tính tổng quát ta giả sử $(a - k)$, $(b - k)$ cùng dấu. Khi đó, ta được

$$(a - k)(b - k) \geq 0.$$

iii) Từ giả thiết $(a - k)(b - k) \geq 0$ ta biến đổi để suy ra bất đẳng thức cần chứng minh hoặc bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức cần chứng minh.

Để minh họa cho ý tưởng được nói ở trên, đầu tiên chúng ta sẽ đến với bài toán sau, nằm trong đề thi chọn Đội tuyển thi học sinh giỏi Quốc gia môn Toán của tỉnh Yên Bái, năm 2012.

Bài toán 1. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca). \quad (1)$$

Lời giải. Theo Mệnh đề 2.1 thì hai trong ba số $(a - 1)$, $(b - 1)$ và $(c - 1)$ cùng dấu. Không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$(a - 1)(b - 1) \geq 0.$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức trên với $2c$, ta được

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2c(a - 1)(b - 1) \\ &= 2c(ab - a - b + 1) \\ &= 2abc - 2ca - 2bc + 2c, \end{aligned}$$

điều này tương đương với

$$2abc \geq 2bc + 2ca - 2c.$$

Cộng hai vế của bất đẳng thức trên với $a^2 + b^2 + c^2 + 1$, ta suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ca + 2bc - 2c + 1.$$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức (1), ta chỉ cần chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ca + 2bc + 2c + 1 \geq 2(ab + bc + ca) = 2ab + 2bc + 2ca,$$

hay

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2c + 1 \geq 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 + (c - 1)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng. Ta được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét.

- (1) Bất đẳng thức (1) là một hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức Schur (xem bài viết “Bất đẳng thức Schur và một số vấn đề liên quan” trên tạp chí Toán học và Sinh viên số 4). Đây là một bất đẳng thức đối xứng giữa ba biến. Do đó, ta dự đoán dấu đẳng thức có thể xảy ra khi ba biến bằng nhau, tức là $a = b = c$. Khi đó, từ (1), ta được

$$\begin{aligned} 2a^3 + 3a^2 + 1 = 6a^2 &\Leftrightarrow 2a^3 - 3a^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a - 1)^2(2a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 1. \end{aligned}$$

Vì vậy, đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Đến đây, ta có thể áp dụng Ý tưởng 1 được trình bày ở trên để đưa ra lời giải cho Bài toán 1.

- (2) Áp dụng bất đẳng thức (1) với $a = xy, b = yz$ và $c = zx$ với $x, y, z > 0$, ta được

$$(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 + 2(xy)(yz)(zx) + 1 \geq 2(x^2yz + xy^2z + xyz^2).$$

Điều này tương đương với

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2x^2y^2z^2 + 1 \geq 2xyz(x + y + z).$$

Nếu $xyz = 1$ thì bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 3 \geq 2(x + y + z). \quad (2)$$

Bất đẳng thức (2) là trường hợp đặc biệt của bài toán sau, nằm trong Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 (VMO) năm 2006, bảng B.

“Tìm số thực k lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 3k \geq (k + 1)(x + y + z).$$

đúng mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.”

- (3) Sử dụng bất đẳng thức trong Bài toán 1, ta có thể chứng minh kết quả sau đây.

Cho a, b, c là các số thực dương. Khi đó

a) $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2c^2 + 2 \geq 2(ab + bc + ca).$

b) $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq (a + 1)(b + 1)(c + 1).$

Bài toán 2 (Đề thi Olympic Toán của Iran, vòng 2, năm 2002). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4. \quad (3)$$

Chứng minh rằng

$$a + b + c \leq 3.$$

Lời giải. Vì a, b, c là các số thực dương nên từ đẳng thức của đề bài, ta được

$$0 < a^2 < 4, 0 < b^2 < 4, 0 < c^2 < 4.$$

Do đó

$$0 < a < 2, 0 < b < 2, 0 < c < 2.$$

Theo Mệnh đề 2.1, trong ba số $(a - 1), (b - 1), (c - 1)$ tồn tại hai số cùng dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a - 1), (b - 1)$ cùng dấu. Khi đó

$$(a - 1)(b - 1) \geq 0 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 \geq 0.$$

hay

$$a + b - ab \leq 1. \quad (4)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 2ab + c^2 + abc.$$

Theo giả thiết thì $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Do đó, từ bất đẳng thức trên và chú ý rằng $0 < c < 2$, ta suy ra

$$\begin{aligned} 2ab + c^2 + abc &\leq 4 \Leftrightarrow 2ab + abc \leq 4 - c^2 \\ &\Leftrightarrow ab(2 + c) \leq (2 + c)(2 - c) \\ &\Leftrightarrow ab + c \leq 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Cộng vế theo vế của bất đẳng thức (4) và (5), ta được

$$a + b + c \leq 3.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét.

- (1) Ngoài lời giải sử dụng nguyên lý Dirichlet như đã trình bày, chúng ta có thể đưa ra một lời giải độc đáo khác cho Bài toán 1 bằng phương pháp lượng giác hóa. Thật vậy, từ (3) ta có

$$c^2 + 2c \cdot \frac{ab}{2} + \frac{a^2b^2}{4} = 4 - a^2 - b^2 + \frac{a^2b^2}{4}.$$

Điều này tương đương với

$$\left(c + \frac{ab}{2}\right)^2 = \frac{16 - 4a^2 - 4b^2 + a^2b^2}{4} = \frac{(4 - a^2)(4 - b^2)}{4}.$$

Từ đẳng thức trên và chú ý rằng $0 < a, b, c < 2$, ta được

$$c = \frac{-ab + \sqrt{(4 - a^2)(4 - b^2)}}{2}.$$

Vì $0 < a, b, c < 2$ nên tồn tại các góc $A, B, C \in (0, \frac{\pi}{2})$ sao cho

$$a = 2 \cos A, b = 2 \cos B, c = 2 \cos C.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} 2 \cos C &= \frac{-4 \cos A \cos B + \sqrt{(4 - 4 \cos^2 A)(4 - 4 \cos^2 B)}}{2} \\ &= \frac{-4 \cos A \cos B + 4 \sin A \sin B}{2} \\ &= -2(\cos A \cos B - \sin A \sin B) \\ &= -2 \cos(A + B) = 2 \cos(\pi - (A + B)). \end{aligned}$$

Do đó

$$\cos C = \cos(\pi - (A + B)).$$

Vì $A, B, C \in (0, \frac{\pi}{2})$ nên từ đẳng thức trên, ta được $A + B + C = \pi$. Từ đây, theo một kết quả quen thuộc trong lượng giác, ta có

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Vì vậy

$$a + b + c = 2(\cos A + \cos B + \cos C) \leq 3.$$

Ta được điều phải chứng minh.

(2) Bạn đọc có thể thử sức thêm với bài toán tổng quát của Bài toán 2 như sau:

“Cho a, b, c và $k \geq 1$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$k(a^2 + b^2 + c^2) + abc = 3k + 1.$$

Chứng minh rằng $a + b + c \leq 3$.”

Ý tưởng 2:

Mở rộng ý tưởng theo Mệnh đề 2.1, ta biết rằng với 3 biến a, b, c và số thực k bất kì thì trong 3 số $(a - k), (b - k), (c - k)$ có hai số hoặc cùng bằng 0 hoặc cùng dấu. Giả sử hai số đó là b và c . Khi đó $(b - k)(c - k) \geq 0$. Từ đó, ta suy ra

$$b^2 + c^2 = k^2 + (b + c - k)^2 - 2(b - k)(c - k) \leq k^2 + (b + c - k)^2.$$

Như vậy, một bài toán bất đẳng thức có giả thiết $a + b + c = s$ (hoặc thuần nhất thì chuẩn hóa) và đẳng thức xảy ra khi nó bằng một giá trị m nào đó thì ta có thể sử dụng đánh giá trên để làm giảm số biến của bất đẳng thức ban đầu. Cụ thể là ta sẽ chọn $k = m$ (để đảm bảo dấu bằng) và như thế ta sẽ có

$$b^2 + c^2 \leq m^2 + (b + c - m)^2 = m^2 + (s - a - m)^2. \quad (6)$$

Bài toán 3 (Đề thi Olympic Toán của Ba Lan, năm 1996). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{9}{10}. \quad (7)$$

Lời giải. Theo mệnh đề 2.1, không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử hai số $b - \frac{1}{3}$ và $c - \frac{1}{3}$ cùng dấu. Khi đó, ta có

$$\left(b - \frac{1}{3}\right) \left(c - \frac{1}{3}\right) \geq 0.$$

Từ đây, sử dụng bất đẳng thức (6), ta được

$$b^2 + c^2 \leq \frac{1}{9} + \left(b + c - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3} - a\right)^2. \quad (8)$$

Chú ý rằng bất đẳng thức (7) tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^2 + 1} &\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{b^2 + 1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{c^2 + 1}\right) - \frac{1}{10} \\ &= \frac{b^2 + 1 - 2b}{2(b^2 + 1)} + \frac{c^2 + 1 - 2c}{2(c^2 + 1)} - \frac{1}{10} \\ &= \frac{(b - 1)^2}{2(b^2 + 1)} + \frac{(c - 1)^2}{2(c^2 + 1)} - \frac{1}{10} \end{aligned}$$

hay

$$\frac{(b - 1)^2}{b^2 + 1} + \frac{(c - 1)^2}{c^2 + 1} \geq \frac{1}{5} + \frac{2a}{a^2 + 1} = \frac{a^2 + 10a + 1}{5a^2 + 5}. \quad (9)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và (8), ta suy ra

$$\begin{aligned} \frac{(b - 1)^2}{b^2 + 1} + \frac{(c - 1)^2}{c^2 + 1} &\geq \frac{[(b - 1) + (c - 1)]^2}{(b^2 + 1) + (c^2 + 1)} \\ &= \frac{(b + c - 2)^2}{(b^2 + c^2) + 2} \\ &\geq \frac{(1 - a - 2)^2}{\frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3} - a\right)^2 + 2} \\ &= \frac{9(1 + a)^2}{19 + (2 - 3a)^2} = \frac{9 + 18a + 9a^2}{23 - 12a + 9a^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Từ (9) và (10), ta thấy rằng để chứng minh bất đẳng thức (7), ta cần chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{9 + 18a + 9a^2}{23 - 12a + 9a^2} \geq \frac{a^2 + 10a + 1}{5a^2 + 5}.$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} & (9 + 18a + 9a^2)(5a^2 + 5) - (a^2 + 10a + 1)(23 - 12a + 9a^2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (45a^4 + 90a^3 + 90a^2 + 90a + 45) - (9a^4 + 78a^3 - 88a^2 + 218a + 23) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 36a^4 + 12a^3 + 178a^2 - 128a + 22 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 18a^4 + 6a^3 + 79a^2 - 64a + 11 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (18a^4 - 6a^3) + (12a^3 - 4a^2) + (99a^2 - 31a) - (33a - 11) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (3a - 1)(6a^3 + 4a^2 + 31a - 11) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (3a - 1)[(6a^3 - 2a^2) + (6a^2 - 2a) + (33a - 11)] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (3a - 1)^2(2a^2 + 2a + 11) \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng vì

$$2a^2 + 2a + 11 = a^2 + (a + 1)^2 + 10 > 0.$$

Do đó, ta được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a = b = c = \frac{1}{3}.$$

- (1) Sử dụng nguyên lý Dirichlet kết hợp với giả thiết, chúng ta nhanh chóng thiết lập được bất đẳng thức (8). Tuy nhiên, các đại lượng b^2 và c^2 lại xuất hiện dưới mẫu số của các biểu thức trong (7). Do đó, để có thể tận dụng một cách triệt để bất đẳng thức (8), chúng ta cần một bất đẳng thức cổ điển nào đó để khi áp dụng làm xuất hiện được tổng $b^2 + c^2$. Đó là những gợi ý để chúng ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a + b)^2}{x + y} \quad (11)$$

với $a, b, x, y > 0$. Tuy nhiên, vế phải của bất đẳng thức (7), chưa xuất hiện dạng của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. Điều này dẫn tới là chúng ta cần phải biến đổi bất đẳng thức (7) thành bất đẳng thức (9). Sau khi sử dụng (8) và (13), chúng ta đã dồn được từ một bất đẳng thức ba biến về một bất đẳng thức một biến. Đến đây, mọi thứ đã trở nên đơn giản hơn rất nhiều bằng phương pháp biến đổi tương đương.

- (2) Ngoài lời giải được trình bày ở trên, để chứng minh bất đẳng thức (7), ta có thể sử dụng “phương pháp tiếp tuyến” như sau.

Từ giả thiết của đề bài, ta thấy rằng $0 < a, b, c < 1$. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

với $0 < x < 1$. Khi đó, ta có

$$f'(x) = \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3}))$ của đồ thị hàm số $f(x)$ là

$$\begin{aligned} y &= f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{18}{25}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{10} \\ &= \frac{18}{25}x + \frac{3}{50} = \frac{36x + 3}{50}. \end{aligned}$$

Do đó, chúng ta cần chứng minh với $0 < x < 1$ thì

$$\frac{x}{1 + x^2} \leq \frac{36x + 3}{50}. \quad (12)$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} 50x &\leq (1 + x^2)(36x + 3) \\ \Leftrightarrow 50x &\leq 36x + 3 + 36x^3 + 3x^2 \\ \Leftrightarrow 36x^3 + 3x^2 - 14x + 3 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (3x - 1)^2(4x + 3) &\geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng vì $4x + 3 > 0$ với $\forall x > 0$. Áp dụng bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} &\leq \frac{18}{25}a + \frac{3}{50} + \frac{18}{25}b + \frac{3}{50} + \frac{18}{25}c + \frac{3}{50} \\ &= \frac{18}{25}(a + b + c) + \frac{9}{50} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

Đây là điều phải chứng minh.

Bài toán 4 (Đề thi Olympic Toán của Nhận Bản, năm 1997). Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta đều có

$$\frac{(b + c - a)^2}{a^2 + (b + c)^2} + \frac{(c + a - b)^2}{b^2 + (c + a)^2} + \frac{(a + b - c)^2}{c^2 + (a + b)^2} \geq \frac{3}{5}. \quad (13)$$

Lời giải. Đặt

$$f(a, b, c) = \frac{(b + c - a)^2}{a^2 + (b + c)^2} + \frac{(c + a - b)^2}{b^2 + (c + a)^2} + \frac{(a + b - c)^2}{c^2 + (a + b)^2} \quad \text{và} \quad g(a, b, c) = \frac{3}{5}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng f là hàm thuần nhất bậc 0. Thật vậy, với mọi số thực t , ta có

$$\begin{aligned} f(ta, tb, tc) &= \frac{(tb + tc - ta)^2}{(ta)^2 + (tb + tc)^2} + \frac{(tc + ta - tb)^2}{(tb)^2 + (tc + ta)^2} + \frac{(ta + tb - tc)^2}{(tc)^2 + (ta + tb)^2} \\ &= \frac{t^2 \cdot (b + c - a)^2}{t^2 \cdot a^2 + t^2 \cdot (b + c)^2} + \frac{t^2 \cdot (c + a - b)^2}{t^2 \cdot b^2 + t^2 \cdot (c + a)^2} + \frac{t^2 \cdot (a + b - c)^2}{t^2 \cdot c^2 + t^2 \cdot (a + b)^2} \\ &= t^0 \cdot f(a, b, c). \end{aligned}$$

Vì vậy f là hàm thuần nhất bậc $k = 0$. Vì f và g đều là hai hàm thuần nhất cùng bậc nên bất đẳng thức

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2} \geq \frac{3}{5}$$

là bất đẳng thức thuần nhất, hơn nữa nó còn là bất đẳng thức đối xứng có điều kiện. Do đó, ta có thể chuẩn hóa

$$a+b+c=1.$$

Khi đó, ta thấy rằng

$$\begin{aligned} & \frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2} \\ &= \frac{(1-a-a)^2}{a^2+(1-a)^2} + \frac{(1-b-b)^2}{b^2+(1-b)^2} + \frac{(1-c-c)^2}{c^2+(1-c)^2} \\ &= \frac{(1-2a)^2}{a^2+1-2a+a^2} + \frac{(1-2b)^2}{b^2+1-2b+b^2} + \frac{(1-2c)^2}{c^2+1-2c+c^2} \\ &= \frac{(1-2a)^2}{2a^2-2a+1} + \frac{(1-2b)^2}{2b^2-2b+1} + \frac{(1-2c)^2}{2c^2-2c+1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Theo mệnh đề 2.1, không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử hai số $b - \frac{1}{3}$ và $c - \frac{1}{3}$ cùng dấu. Từ đây, ta được

$$\left(b - \frac{1}{3}\right) \left(c - \frac{1}{3}\right) \geq 0.$$

Kết hợp điều này với bất đẳng thức (6), ta suy ra

$$b^2 + c^2 \leq \frac{1}{9} + \left(b + c - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3} - a\right)^2. \quad (15)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và bất đẳng thức (15), ta được

$$\begin{aligned} \frac{(1-2b)^2}{2b^2-2b+1} + \frac{(1-2c)^2}{2c^2-2c+1} &\geq \frac{[(1-2b) + (1-2c)]^2}{(2b^2-2b+1) + (2c^2-2c+1)} \\ &= \frac{[2(1-b-c)]^2}{2b^2+2c^2-2(b+c)+2} \\ &= \frac{4a^2}{2b^2+2c^2-2(1-a)+2} \\ &= \frac{2a^2}{b^2+c^2+a} \\ &\geq \frac{2a^2}{\frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3} - a\right)^2 + a} \\ &= \frac{18a^2}{9a^2 - 3a + 5}. \end{aligned} \quad (16)$$

Từ (15) và (16), ta được

$$\begin{aligned}
 & \frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2} \\
 & \geq \frac{(1-2a)^2}{2a^2-2a+1} + \frac{18a^2}{9a^2-3a+5} \\
 & \geq \frac{4a^2-4a+1}{2a^2-2a+1} + \frac{18a^2}{9a^2-3a+5} \\
 & = \frac{(4a^2-4a+1)(9a^2-3a+5) + 18a^2(2a^2-2a+1)}{(2a^2-2a+1)(9a^2-3a+5)} \\
 & = \frac{72a^4-84a^3+59a^2-23a+5}{18a^4-24a^3+25a^2-13a+5}.
 \end{aligned}$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}
 & \frac{72a^4-84a^3+59a^2-23a+5}{18a^4-24a^3+25a^2-13a+5} \geq \frac{3}{5} \\
 & \Leftrightarrow 5(72a^4-84a^3+59a^2-23a+5) \geq 3(18a^4-24a^3+25a^2-13a+5) \\
 & \Leftrightarrow 153a^4-174a^3+110a^2-38a+5 \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow (153a^4-51a^3) - (123a^3-41a^2) + (69a^2-23a) - (15a-5) \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow (3a-1)(51a^3-41a^2+23a-5) \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow (3a-1)[(51a^3-17a^2) - (24a^2-8a) + (15a-5)] \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow (3a-1)^2(17a^2-8a+5) \geq 0
 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng vì

$$17a^2-8a+5=9a^2+4(a-1)^2+1>0.$$

Do đó, ta được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét.

- (1) Điểm đáng chú ý trong lời giải trên là việc giả sử $a+b+c=1$. Ta hoàn toàn có thể giả sử bất kì một biểu thức nào khác, chẳng hạn $a+b+c=3$ hoặc $abc=1$ hoặc $ab+bc+ca=3$. . . Tuy nhiên ta cần chú ý xem việc chuẩn hóa biểu thức nào cho hợp lý để có chứng minh đơn giản nhất.

Chẳng hạn trong Bài toán 4 tác giả chọn $a+b+c=1$ để có thể suy ra một bất đẳng thức khác mà ứng dụng được nguyên lý Dirichlet vào chứng minh bất đẳng thức đó. Ta cũng có thể chuẩn hóa $a+b+c=3$ để chứng minh bằng phương pháp hệ số bất định (với lời giải này, bạn đọc tham khảo trang 68 tài liệu [7]).

- (2) Bài toán 3 và Bài toán 4 là hai ví dụ tương đối kinh điển của “phương pháp tiếp tuyến” trong chứng minh bất đẳng thức. Yếu tố quan trọng nhất để có thể sử dụng phương pháp này là chuyển được bất đẳng thức về dạng

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq m,$$

hoặc

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \leq m,$$

hay nói cách khác là tạo lập các hàm đặc trưng để xét tính lồi lõm và chọn điểm rơi.

Điều này giống với phương pháp mà tác giả đang nói đến ở bài viết, cả hai phương pháp đều cần phải chọn được điểm rơi để giải quyết các bước tiếp theo của bài toán. Tuy nhiên, ưu điểm của nguyên lý Dirichlet trong các ví dụ này là học sinh Trung học Cơ sở hoặc Trung học Phổ thông nhưng chưa có kiến thức về đạo hàm, khảo sát hàm số thì vẫn sử dụng được.

Bài toán 5. Cho $a, b, c \geq 0$ và không đồng thời bằng 0, thỏa mãn

$$ab + bc + ca = 1.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}. \quad (17)$$

Lời giải. Từ giả thiết $a, b, c \geq 0$ và $ab + bc + ca = 1$ ta suy ra

$$0 \leq ab \leq 1, 0 \leq bc \leq 1, 0 \leq ca \leq 1.$$

Theo mệnh đề 2.1, không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử hai số $a - 1$ và $b - 1$ cùng dấu. Khi đó, ta có

$$(a - 1)(b - 1) \geq 0 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 1 + ab \geq a + b.$$

Vì $ab \leq 1$ nên ta được

$$2 \geq 1 + ab \geq a + b \geq 0.$$

Chú ý rằng nếu $a + b = 0$ thì $a = b = 0$. Điều này suy ra $ab + bc + ca = 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết của đề bài. Do đó $a + b > 0$. Vì vậy, ta có

$$ab + bc + ca = 1 \Leftrightarrow 1 - ab = bc + ca = c(a + b) \Leftrightarrow c = \frac{1 - ab}{a + b}.$$

Từ đây, ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} &= \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b + \frac{1-ab}{a+b}} + \frac{1}{a + \frac{1-ab}{a+b}} \\ &= \frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{1+a^2} + \frac{a+b}{1+a^2}. \end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức

$$\frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{1+b^2} + \frac{a+b}{1+a^2} \geq \frac{5}{2},$$

hay

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+a^2} \geq \frac{5}{2(a+b)}. \quad (18)$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+a^2} &= 1 - \frac{b^2}{1+b^2} + 1 - \frac{a^2}{1+a^2} \\ &\geq 1 - \frac{b^2}{2b} + 1 - \frac{a^2}{2a} \\ &= 1 - \frac{b}{2} + 1 - \frac{a}{2} \\ &= 2 - \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Vì vậy, ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a+b)^2} + 2 - \frac{a+b}{2} &\geq \frac{5}{2(a+b)} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(a+b)^3} + \frac{2}{a+b} - \frac{1}{2} &\geq \frac{5}{(a+b)^2}. \end{aligned}$$

Đặt $x = \frac{1}{a+b} \geq \frac{1}{2}$ thì bất đẳng thức trên trở thành

$$\begin{aligned} x^3 + 2x - \frac{1}{2} &\geq \frac{5}{2}x^2 \\ \Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (2x^3 - x^2) - (4x^2 - 2x) + (2x - 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 1)(x^2 - 2x + 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)^2(2x - 1) &\geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng với $\forall x \geq \frac{1}{2}$. Ta được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 0$ và các hoán vị tương ứng.

Nhận xét.

- (1) Mặc dù bất đẳng thức (17) là một bất đẳng thức đối xứng giữa ba biến a, b, c , tuy nhiên đẳng thức xảy ra không tại $a = b = c$ mà tại $a = b, c = 0$ và các hoán vị tương ứng. Hơn nữa, do vai trò của a, b, c là như nhau nên chúng ta vẫn có thể áp dụng được nguyên lý Dirichlet trong bài toán này. Từ giả thiết đầu bài, chúng ta có giảm biến của bất đẳng thức (17) từ ba biến xuống còn hai biến bằng viết rút c từ đẳng thức $ab + bc + ca = 1$. Việc sử dụng kĩ thuật “Cauchy ngược dấu” là tự nhiên để dồn về trái của bất đẳng thức (18) về biểu thức chỉ còn chứa biến $\frac{1}{a+b}$. Thực ra, trong chứng minh trên, nguyên lý Dirichlet chỉ đóng vai trò trong việc tìm được chặn dưới cho biến $x = \frac{1}{a+b}$.

- (2) Sử dụng phương pháp tương tự như trong chứng minh bài toán trên, chúng ta có thể chứng minh bài toán sau đây.

“Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \geq \frac{5}{2}.$$

với $a, b, c \geq 0$ và không đồng thời bằng 0, thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$.”

Ngoài ứng dụng trong chứng minh một lớp các bất đẳng thức ba biến dạng đối xứng, nguyên lý Dirichlet còn là một công cụ tốt trong việc chứng minh lớp toán bất đẳng thức liên quan tới chia đoạn thẳng. Chúng ta sẽ đi tìm hiểu ứng dụng nguyên lý Dirichlet đối với bài toán này qua mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 2.2. Cho $n + 1$ điểm và một đoạn thẳng có độ dài d được chia thành n phần bằng nhau. Khi đó, nếu ta đặt $n + 1$ điểm vào đoạn thẳng cho trước đó thì phải có ít nhất 2 điểm thuộc cùng một đoạn nhỏ.

Dưới đây là một số bài toán minh họa để bạn đọc có thể hiểu rõ hơn trong việc áp dụng Mệnh đề 2.2 vào chứng minh lớp bài toán bất đẳng thức liên quan tới chia đoạn thẳng.

Bài toán 6. Chứng minh rằng mỗi bộ gồm 11 số thực khác nhau trong khoảng $[1, 1000]$ có thể chọn được 2 số x và y , mà chúng thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$0 < x - y < 1 + 3\sqrt[3]{xy}.$$

Lời giải. Chúng ta xét căn bậc ba của các số trong bộ số đã cho $x_1, x_2, \dots, x_{11}$. Từ điều kiện đã cho, ta suy ra

$$1 \leq \sqrt[3]{x_i} \leq 10, \quad i = 1, 2, \dots, 11.$$

Chúng ta chia khoảng $[1, 1000]$ ra mười phần bằng nhau. Khi đó, có ít nhất một trong hai số $\sqrt[3]{x_1}, \sqrt[3]{x_2}, \dots, \sqrt[3]{x_{11}}$ nằm trong cùng một đoạn nhỏ. Nếu các số đó là $\sqrt[3]{x_i}$ và $\sqrt[3]{x_j}, i \neq j$ và $x_i > x_j$ thì ta được

$$0 < \sqrt[3]{x_i} - \sqrt[3]{x_j} \leq \frac{9}{10} < 1. \quad (19)$$

Từ bất đẳng thức trên, ta được

$$0 < (\sqrt[3]{x_i} - \sqrt[3]{x_j})^3 < 1.$$

Kết hợp bất đẳng thức này với (19), ta có

$$0 < x_i - x_j < 1 + 3\sqrt[3]{x_i x_j} (\sqrt[3]{x_i} - \sqrt[3]{x_j}) < 1 + 3\sqrt[3]{x_i x_j}.$$

Ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét. Bài toán không còn đúng với bộ 10 số thực trong khoảng $[1, 1000]$. Phản ví dụ: bộ số $1^3, 2^3, \dots, 10^3$. Nếu $i \neq j$ và $i > j$ chúng ta có $(i - j)^3 \geq 1$, như vậy

$$i^2 + ij + j^2 \geq 1 + 3ij.$$

Nghĩa là

$$i - j = (i - j)(i^2 + ij + j^2) \geq 1 + 3ij.$$

Đẳng thức xảy ra khi $i = j + 1$.

Bài toán 7. Trên đoạn thẳng $[0, 1]$ đặt bốn số khác nhau: a, b, c, d . Chứng minh rằng trên đoạn thẳng này tìm được một số x sao cho thỏa mãn bất đẳng thức sau đây

$$\frac{1}{|x - a|} + \frac{1}{|x - b|} + \frac{1}{|x - c|} + \frac{1}{|x - d|} < 40. \quad (20)$$

Lời giải. Bốn điểm chia đoạn thẳng độ dài 1 thành 5 phần. Theo Nguyên lý Dirichlet tồn tại hai điểm cạnh nhau có khoảng cách không nhỏ hơn 0,2. Ta cho đó là a và c . Khi đó, ta chọn $x = \frac{a+c}{2}$ (trung bình cộng của hai số a và c). Ta có

$$|x - a| \geq 0,1 \Leftrightarrow \frac{1}{|x - a|} \leq 10,$$

$$|x - b| > 0,1 \Leftrightarrow \frac{1}{|x - b|} < 10,$$

$$|x - c| \geq 0,1 \Leftrightarrow \frac{1}{|x - c|} \leq 10,$$

$$|x - d| > 0,1 \Leftrightarrow \frac{1}{|x - d|} < 10.$$

Cộng vế theo vế của bốn bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

3. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Kết thúc một vài bài toán minh họa ở trên có lẽ chúng ta đã hiểu và biết được phần nào về ứng dụng của nguyên lý Dirichlet vào chứng minh bất đẳng thức. Để hiểu sâu hơn về ứng dụng này, tác giả xin đưa ra một số bài tập cho bạn đọc có thể thử sức.

Bài toán 8. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 8 \geq 5(a + b + c).$$

Bài toán tổng quát: Cho a, b, c và $k \geq 1$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$k(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 3k + 2 \geq (2k + 1)(a + b + c).$$

Bài toán 9. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{2a+b}\right)^3 + \left(\frac{b}{2b+c}\right)^3 + \left(\frac{c}{2c+a}\right)^3 \geq \frac{1}{9}.$$

Bài toán 10. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$x + y + z + 1 = 4xyz.$$

Chứng minh rằng

$$xy + yz + zx \geq x + y + z.$$

Bài toán 11. Cho các số thực dương a, b, c sao cho

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4.$$

Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca - abc \leq 2.$$

Bài toán 12. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Bài toán 13. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) + 4 \geq 4(ab + bc + ca) + (abc - 1)^2.$$

Bài toán 14. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{6a^2 - 4a + 1} + \frac{b^2}{6b^2 - 4b + 1} + \frac{c^2}{6c^2 - 4c + 1} \leq 1.$$

Bài toán 15. Cho 7 số thực bất kỳ. Chứng minh rằng giữa chúng có thể chọn được hai số, chẳng hạn x và y , sao cho

$$0 \leq \frac{x - y}{1 + xy} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Bài toán 16. Xét bốn số bất kỳ trong khoảng

$$\left[\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \right].$$

Chứng minh rằng tồn tại hai số trong các số đã cho a và b , sao cho

$$|a\sqrt{4 - b^2} - b\sqrt{4 - a^2}| \leq 2.$$

Bài toán 17. Cho tập $X = \{1, 2, 3, \dots, 81\}$. Chứng minh rằng trong 3 phần tử tùy ý của X luôn có hai phần tử a, b sao cho

$$0 < \sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b} \leq 1.$$

Lời cảm ơn

Tác giả chân thành cảm ơn ThS. Phan Văn Lộc, người đã trực tiếp và tận tình hướng dẫn tác giả trong quá trình viết bài báo này. Tác giả chân thành cảm ơn ThS. Hà Tuấn Dũng đã có những góp ý và chỉnh sửa để cải thiện phiên bản đầu tiên của bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] H. T. Châu, N. Đ. Thi, *Sử dụng Nguyên lý Dirichlet trong chứng minh bất đẳng thức*, Tạp chí Toán học Tuổi trẻ, số 413, 2011.
- [2] N. V. Duy, *Chuyên đề sử dụng tiếp tuyến trong việc chứng minh bất đẳng thức*, diendantoanhoc.net.
- [3] P. G. L. Dirichlet, *Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen*, Bericht über die Verhandlungen der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften, 93-95. 5
- [4] P. G. L. Dirichlet, *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, volume 24, 291-371, 1842. 5
- [5] N. H. Diễn, *Khám phá Nguyên lý Dirichlet và ứng dụng*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2020.
- [6] J. Elstrodt, *The Life and Work of Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)*, Clay Mathematics Proceedings Volume 7, 2007. 5
- [7] P. K. Hùng, *Sáng tạo Bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Hà Nội, 2011. 15
- [8] L. T. N. Long (Chủ biên), T. N. Q. Cường, *Chuyên đề : Toán Logic và Rời rạc*, tháng 1 năm 2011.
- [9] <http://mathvn.com>.
- [10] N. V. Mau, *Bất đẳng thức-Định lý và áp dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2006.
- [11] J. J. O'Connor, E. F. Robertson, *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet*, MacTutor, 2000, <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dirichlet/>
- [12] B. Rittaud, A. Heeffer, *The Pigeonhole Principle, Two Centuries Before Dirichlet*, The Mathematical Intelligencer, volume 36, 27–29, 2014.
- [13] L. K. Sỹ *Bất đẳng thức chặt và sắc nét*, <https://lovetoan.wordpress.com/2018/05/01/bat-dang-thuc-chat-va-sac-net-le-khanh-sy/>.
- [14] H. T. Trà, *Ứng dụng nguyên lý Dirichlet và nguyên lý cực hạn trong giải toán hình học*, Bài tập lớn, Khoa Toán, Đại học Vinh, 2011. 3



PHƯƠNG TRÌNH HÀM CAUCHY VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

Quách Đăng Duy và Nguyễn Thanh Nga - K45 TTA

Khoa Toán, ĐHSP Hà Nội 2

Bùi Ngọc Diệp - Cựu sinh viên K38E SPT

THPT Tây Hồ, Hà Nội

Tóm tắt. Trong bài viết này, chúng tôi sẽ trình bày một số các kết quả nghiên về “phương trình hàm Cauchy” và các ứng dụng của nó trong việc giải quyết một lớp phương trình hàm “kiểu cộng tính” xuất hiện trong các kỳ thi Olympic Toán.

1. MỞ ĐẦU

Một trong những phương trình cơ bản trong Lý thuyết phương trình hàm là phương trình hàm Cauchy:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

trong đó $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số cần tìm. Đây là phương trình có nhiều ứng dụng không chỉ trong Lý thuyết phương trình hàm mà còn ở các lĩnh vực khác nhau của Toán học, bao gồm Hình học, Giải tích thực và phức, Phương trình đạo hàm riêng, Giải tích hàm và Lý thuyết tài chính. Phương trình này được nghiên cứu lần đầu tiên bởi nhà toán học Adrien-Marie Legendre (1752-1833) vào năm 1794 và sau đó là Carl Friedrich Gauss (1777-1855) vào năm 1809. Tuy nhiên, nhà toán học người Pháp, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) là người đầu tiên đã tìm ra được lớp nghiệm liên tục của phương trình (1) (cùng với một vài phiên bản khác của nó) vào năm 1821. Từ đó trở đi, phương trình (1) thường được biết đến tên gọi là “phương trình hàm Cauchy” (ngoài ra phương trình (1) cũng thường được gọi là “phương trình hàm cộng tính”). Cụ thể trong tài liệu [5], ông đã chứng minh rằng nếu f là một hàm số liên tục từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ và thỏa mãn (1) với mọi biến số thực x, y thì $f(x) = ax$ với $a = f(1)$. Sử dụng kết quả này, Cauchy đã nghiên cứu nghiệm của các phiên bản khác nhau của phương trình hàm (1). Kể từ sau các kết quả của Cauchy, phương trình (1) đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trên thế giới. Darboux [8] đã cải tiến các kết quả của Cauchy bằng việc thay giả thiết tính liên tục của hàm f trên $\mathbb{R}$ bởi tính đơn điệu hoặc bị chặn trên một khoảng. Fréchet [10], Blumberg [2], Banach [1] cùng một số nhà toán học khác đã nghiên cứu phương trình (1) trong trường hợp f là hàm đo được Lebesgue. Sau đó, Kormes [13] đã giả sử rằng f là một hàm bị chặn trên một tập đo được với độ đo dương và cũng thu được kết quả là $f(x) = ax$ với a là một hằng số. Mehdi [15] đã cải tiến các kết quả này với giả thiết f là một hàm số bị chặn trên một tập Baire loại hai. Mặt khác, vào năm 1905, Hamel [11] đã nghiên cứu phương trình (1) mà không có bất kì điều kiện nào của hàm f . Sử dụng cơ sở Hamel, ông đã chứng tỏ rằng tồn tại các nghiệm phi tuyến của (1). Về các

kết quả nghiên cứu liên quan tới phương trình hàm Cauchy, chúng tôi giới thiệu bạn đọc tới bài báo [18] và các tài liệu tham khảo trong đó. Ngoài các ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của Toán cao cấp, phương trình hàm Cauchy còn đóng một vai trò quan trọng trong việc giải quyết một lớp phương trình hàm “kiểu cộng tính” (đây là các phương trình hàm có thể đưa được về dạng (1)). Dạng toán này thường xuyên xuất hiện trong các kỳ thi Olympic Toán sơ cấp trong những năm gần đây. Không những thế, phương pháp nghiên cứu của Cauchy trong việc tìm nghiệm liên tục của phương trình (1) cũng là phương pháp mẫu mực và thường được dùng để giải quyết các bài toán về phương trình hàm trên tập số thực.



Nhà toán học Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) (nguồn: Wikipedia).

Tiếp theo, chúng tôi sẽ giới thiệu tới bạn đọc các kết quả nghiên cứu của Cauchy đối với nghiệm hàm liên tục của phương trình (1). Các kết quả này sẽ được trình bày chi tiết thông qua bài toán sau đây.

Bài toán 1. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Lời giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn hệ thức của đề bài, khi đó ta có (2). Thay $x = y = 0$ trong (2), ta được

$$f(0) = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Ta sẽ chứng minh hệ thức sau bằng phương pháp qui nạp toán học theo n

$$f(nx) = nf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Vì $f(0) = 0$ nên ta thấy rằng đẳng thức trên đúng với $n = 0$. Giả sử đẳng thức (3) đúng với $n = k$ với $k \in \mathbb{N}^*$, tức là

$$f(kx) = kf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
 f((k+1)x) &= f(kx+x) \\
 &= f(kx) + f(x) \\
 &= kf(x) + f(x) \\
 &= (k+1)f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Do đó đẳng thức (3) đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, đẳng thức (3) đúng với $\forall n \in \mathbb{N}$. Như vậy, ta đã chứng minh được đẳng thức (3). Thay y bởi $-x$ trong (2) và sử dụng $f(0) = 0$, ta được

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bởi vậy f là một hàm số lẻ. Khi đó với $\forall n \in \mathbb{Z}$ và $n < 0$, sử dụng đẳng thức (3) ta có

$$f(nx) = f(-n(-x)) = -nf(-x) = nf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp đẳng thức trên với (3), ta được

$$f(nx) = nf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Với $n \in \mathbb{N}^*$, sử dụng (4), ta có

$$f(x) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}x\right) = nf\left(\frac{1}{n}x\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này suy ra

$$f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Với $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ và $n > 0$, sử dụng (4) và (5) ta được

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{m}{n}x\right) &= f\left(m \cdot \frac{1}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) \\
 &= m \cdot \frac{1}{n}f(x) = \frac{m}{n}f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$f(rx) = rf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall r \in \mathbb{Q}$$

Thay $x = 1$ trong đẳng thức trên, ta được

$$f(r) = rf(1), \quad \forall r \in \mathbb{Q}. \quad (6)$$

Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại dãy số hữu tỉ $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x.$$

Vì f là một hàm số liên tục nên ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [r_n f(1)] = f(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = f(1)x. \end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

trong đó $a = f(1)$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

với a là một hằng số.

Nhận xét.

- (1) Trong bài toán trên, nếu ta thay giả thiết hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ bởi hàm số f liên tục tại một điểm x_0 thì kết quả trên vẫn đúng. Thật vậy, nếu hàm số f liên tục tại một điểm x_0 thì

$$\lim_{t \rightarrow x_0} f(t) = f(x_0).$$

Do đó, ta được

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow x} f(u) &= \lim_{u-x+x_0 \rightarrow x_0} f((u-x+x_0) + (x-x_0)) \\ &= \lim_{t \rightarrow x_0} f(t + (x-x_0)) \\ &= \lim_{t \rightarrow x_0} f(t) + f(x-x_0) \\ &= f(x_0) + f(x-x_0) = f(x). \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ f là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Như vậy, nếu f là một hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, cộng tính và liên tục tại một điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ thì f liên tục trên $\mathbb{R}$.

- (2) Nếu ta thay giả thiết hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ bởi hàm số f đơn điệu trên $\mathbb{R}$ thì kết quả trên vẫn đúng. Thật vậy, từ kết quả của Bài toán 1 ta có

$$f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{Q}, \quad (7)$$

trong đó a là một hằng số. Ta sẽ chứng minh trong trường hợp f là một hàm đơn điệu tăng. Trường hợp f là một hàm đơn điệu giảm, cách chứng minh là tương tự. Với $x \in \mathbb{R}$, tồn tại hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ và $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$u_n \leq x \leq v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

và

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = x.$$

Vì f là một hàm số đơn điệu tăng nên ta có

$$f(u_n) \leq f(x) \leq f(v_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Kết hợp điều này với (7) ta được

$$au_n \leq f(x) \leq av_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chú ý rằng

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (au_n) = a \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = ax, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (av_n) = a \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = ax.$$

Cho $n \rightarrow +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được

$$ax \leq f(x) \leq ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này chứng tỏ rằng

$$f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

với a là một hằng số.

- (3) Rõ ràng, từ kết quả của Bài toán 1, ta thấy rằng nếu f là một hàm số đi từ tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ hoặc tập số nguyên $\mathbb{Z}$ hoặc tập số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ và bỏ đi giả thiết f là một hàm số liên tục thì kết quả bài toán trên vẫn đúng.

Trong phần sau của bài viết này, chúng tôi sẽ trình bày một số kết quả liên quan tới Bài toán 1. Những ứng dụng của phương trình hàm Cauchy (đặc biệt là phương pháp cũng như kết quả của Bài toán 1) thông qua các bài toán xuất hiện trong các kỳ thi Olympic Toán sẽ được trình bày ở phần cuối của bài viết.

2. MỘT SỐ KẾT QUẢ LIÊN QUAN TỚI PHƯƠNG TRÌNH HÀM CAUCHY

Một câu hỏi được đặt ra sau khi giải quyết Bài toán 1 đó là: “kết quả của Bài toán còn đúng nếu ta thay giả thiết $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thành f là một hàm số bị chặn trên một đoạn nào đó?” Để trả lời cho câu hỏi này, chúng ta sẽ đến với bài toán sau đây.

Bài toán 2. *Tim tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bị chặn trên đoạn $[a; b]$ và thỏa mãn*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bị chặn trên đoạn $[a; b]$ và thỏa mãn (8). Vì f bị chặn trên $[a; b]$ nên tồn tại số thực M sao cho

$$-M < f(x) < M, \quad \forall x \in [a; b].$$

Bây giờ, chúng ta sẽ chứng minh rằng hàm số f cũng bị chặn trên đoạn $[0; b-a]$. Thật vậy, với $\forall x \in [0; b-a]$ thì $x+a \in [a; b]$. Điều này suy ra

$$-M < f(x+a) < M.$$

Kết hợp bất đẳng thức trên với (8), ta được

$$-2M \leq f(x) = f(x+a) - f(a) \leq 2M, \quad \forall x \in [0; b-a],$$

hay

$$|f(x)| \leq 2M, \quad \forall x \in [0; b-a].$$

Điều này chứng tỏ f là một hàm số bị chặn trên đoạn $[0; b-a]$. Đặt $b-a = d > 0$ thì khi đó f cũng là một hàm số bị chặn trên đoạn $[0; d]$. Tiếp theo, ta đặt

$$c = \frac{f(d)}{d}, \quad g(x) = f(x) - cx, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó, ta được

$$g(x+y) = f(x+y) - c(x+y) = f(x) - cx + f(y) - cy = g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Chú ý rằng

$$g(d) = f(d) - cd = f(d) - f(d) = 0$$

Do đó, thay $y = d$ trong (9), ta suy ra

$$g(x+d) = g(x) + g(d) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này chứng tỏ, g là một hàm tuần hoàn chu kỳ d . Hơn nữa g là hàm bị chặn trên đoạn $[0; d]$. Vì vậy, g là một hàm số bị chặn trên $\mathbb{R}$. Giả sử $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x_0) \neq 0$. Sử dụng kết quả của Bài toán 1, ta có

$$g(nx_0) = ng(x_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Từ đây, ta được

$$|g(nx_0)| = n|g(x_0)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vì g là hàm số bị chặn trên $\mathbb{R}$ và $g(x_0) \neq 0$ nên từ đẳng thức trên, ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |g(nx_0)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |g(x_0)|n = |g(x_0)| \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

Do đó $|g(nx_0)|$ lớn tùy ý (chỉ cần chọn n đủ lớn), trái với điều kiện bị chặn của hàm g . Vì vậy điều giả sử là sai. Từ đây, ta được

$$g(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này chứng tỏ

$$f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

với a là một hằng số. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

với a là một hằng số.

Sử dụng kết quả của Bài toán 1, chúng ta có thể tìm được nghiệm hàm liên tục của phương trình hàm nhân tính:

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Tuy nhiên, để tìm được nghiệm liên tục của phương trình (10), chúng ta cần kết quả của bài toán sau đây.

Bài toán 3. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Lời giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn hệ thức của đề bài, khi đó ta có (11). Ta thấy rằng hàm số $f(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là nghiệm của (11). Ta xét trường hợp $f(x)$ không đồng nhất bằng 0. Khi đó, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Thay y bởi $x_0 - x$ trong (10), ta được

$$f(x_0) = f(x + x_0 - x) = f(x)f(x_0 - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì $f(x_0) \neq 0$ nên từ đẳng thức trên, ta được

$$f(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trong (11), thay x bởi $\frac{x}{2}$, thay y bởi $\frac{x}{2}$ và kết hợp với kết quả trên, ta có

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $g(x) = \ln f(x)$. Khi đó, $g(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \ln f(x+y) = \ln[f(x)f(y)] \\ &= \ln f(x) + \ln f(y) \\ &= g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (12)$$

Từ đây, theo kết quả của Bài toán 1, ta được

$$g(x) = bx, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

với b là một hằng số tùy ý. Điều này suy ra

$$f(x) = e^{g(x)} = e^{bx} = (e^b)^x = a^x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

với $a = e^b > 0$ là một hằng số tùy ý. Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = a^x$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Vậy các hàm số cần tìm là

$$f(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

và

$$f(x) = a^x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

với $a > 0$ tùy ý.

Bài toán 4. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (13)$$

Lời giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn hệ thức của đề bài, khi đó ta có (13). Khi đó, thay $y = 1$ vào (13), ta được

$$f(x) = f(x)f(1) \Leftrightarrow f(x)[f(1) - 1] = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (14)$$

Đến đây, ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. $f(1) \neq 1$. Từ (14), ta được

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Nghiệm này thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Trường hợp 2. $f(1) = 1$. Khi đó, thay y bởi $\frac{1}{x}$ trong (13), ta có

$$1 = f(1) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Đẳng thức trên chứng tỏ

$$f(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Trong (13) thay y bởi x và kết hợp với kết quả trên, ta được

$$f(x^2) = f(x)f(x) = [f(x)]^2 > 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Do đó, ta có

$$f(x) > 0, \quad \forall x > 0.$$

a) Xét $x, y \in (0, +\infty)$. Khi đó, đặt

$$x = e^u, y = e^v, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Từ (13), ta được

$$f(e^{u+v}) = f(e^u \cdot e^v) = f(e^u) \cdot f(e^v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Đặt $g(u) = f(e^u)$ thì đẳng thức trên trở thành

$$g(u+v) = g(u) \cdot g(v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Chú ý rằng g là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ kết quả của Bài toán 3, ta được

$$g(u) = a^u, \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

với $a > 0$ tùy ý. Do đó, ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= f(e^u) = g(u) = a^u \\ &= a^{\ln x} = x^{\ln a} = x^\alpha, \quad \forall x \in (0, +\infty), \end{aligned}$$

trong đó $\alpha = \ln a$.

b) Xét $x, y \in (-\infty, 0)$. Thay y bởi x trong (13) và áp dụng kết quả phần a, ta được

$$[f(x)]^2 = f(x)f(x) = f(x^2) = (x^2)^\alpha = (|x|^\alpha)^2$$

Vì $f(x) \neq 0, \forall x \neq 0$ và $f(x)$ là hàm liên tục trên $(-\infty, 0)$ nên từ đẳng thức trên ta có

$$f(x) = |x|^\alpha, \quad \forall x \in (-\infty, 0),$$

hoặc

$$f(x) = -|x|^\alpha, \quad \forall x \in (-\infty, 0).$$

Kết hợp các kết quả ở phần a và b, ta được

$$f(x) = |x|^\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

hoặc

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha, & \forall x \in (0, +\infty), \\ -|x|^\alpha, & \forall x \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

trong đó $\alpha \in \mathbb{R}$ tùy ý. Thử lại, ta thấy các hàm số này đều thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy, nghiệm hàm của Bài toán 4 là một trong các hàm số sau:

$$f(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$f(x) = |x|^\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

và

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha, & \forall x \in (0, +\infty), \\ -|x|^\alpha, & \forall x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

3. ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH HÀM CAUCHY

Đầu tiên, chúng ta sẽ đến với bài toán sau là Bài toán số 1 trong đề thi Olympic Toán học Quốc tế (IMO) năm 2019.

Bài toán 5 (IMO 2019). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn*

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)) \tag{15}$$

với mọi số nguyên a và b .

Lời giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn hệ thức của đề bài, khi đó ta có (15). Thay $b = 0$ trong (15) ta được

$$f(2a) + 2f(0) = f(f(a)), \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$$

Thay $a = 0$ trong (15) ta có

$$f(0) + 2f(b) = f(f(b)), \quad \forall b \in \mathbb{Z}.$$

Từ hai đẳng thức trên, ta được

$$f(2a) + 2f(0) = f(0) + 2f(a), \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$$

Điều này suy ra

$$f(2a) = 2f(a) - f(0), \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp đẳng thức trên với (15) ta thu được

$$2f(a) + 2f(b) - f(0) = f(f(a+b)), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

Thay $a = 0$ và thay b bởi $a + b$ trong đẳng thức trên, ta có

$$2f(a+b) + f(0) = f(f(a+b)), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

Vì vậy, ta được

$$\begin{aligned} 2f(a) + 2f(b) - f(0) &= f(f(a+b)) \\ &= 2f(a+b) + f(0), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Do đó

$$f(a) + f(b) - f(0) = f(a+b), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}. \quad (16)$$

Đặt $g(x) = f(x) - f(0)$, từ đẳng thức trên, ta suy ra

$$g(a+b) = g(a) + g(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

Từ đẳng thức trên và nhận xét 3 ở Bài toán 1 ta được

$$g(x) = kx, \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Do đó

$$f(x) = kx + l, \quad \forall x \in \mathbb{Z},$$

trong đó $l = f(0)$. Thay kết quả này trở lại (15) ta được

$$2k(a+b) + 3l = k^2(a+b) + (k+1), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

Đồng nhất hệ số hai vế ở đẳng thức trên, ta được

$$2k = k^2$$

và

$$3l = (k+1)l.$$

Từ đó, ta được

$$k = 2 \text{ và } l \in \mathbb{Z} \text{ là một hằng số.}$$

Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = 2x + l, \quad \forall x \in \mathbb{Z},$$

trong đó $l \in \mathbb{Z}$ là một hằng số.

Nhận xét.

(1) Bài toán 5 là một bài toán dễ và có thể được xem là một hệ quả trực tiếp của bài toán 1. Rõ ràng nếu ta thay giả thiết f là một hàm số đi từ $\mathbb{Z}$ vào $\mathbb{Z}$ bởi f là một hàm số đi từ $\mathbb{Q}$ vào $\mathbb{Q}$ hoặc f là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ hoặc f là một hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$ thì kết quả của Bài toán 5 vẫn đúng. Có thể thấy rằng Bài toán 5 đã được xây dựng từ chính Bài toán 1.

(2) Dưới đây là một số bài toán liên quan.

i) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\{f(x+y)\} = \{f(x)\} + \{f(y)\}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Trong đó $[t]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá t và $\{t\} = t - [t]$.

ii) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x+y+xy) = f(x) + f(y) + f(xy), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Tiếp theo, chúng ta sẽ đến với bài toán sau, nằm trong Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 (VMO), bảng B năm 2006.

Bài toán 6 (VMO 2006, bảng b). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x-y)f(y-z)f(z-x) + 8 = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Lời giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn hệ thức của đề bài, khi đó ta có (17). Thay x bởi $\frac{t}{2}$, y bởi $-\frac{t}{2}$, và $z = 0$ trong (17), ta được

$$0 = f\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right)f\left(-\frac{t}{2}\right)f\left(-\frac{t}{2}\right) + 8 = f(t)f^2\left(-\frac{t}{2}\right) + 8, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

hay

$$f(t)f^2\left(-\frac{t}{2}\right) = -8, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vì $f^2\left(-\frac{t}{2}\right) > 0$, $-8 < 0$ nên từ đẳng thức trên, ta được

$$f(t) < 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó, từ (17), ta suy ra

$$[-f(x-y)][-f(y-z)][-f(z-x)] = 8$$

$$\Leftrightarrow \log_2\{[-f(x-y)][-f(y-z)][-f(z-x)]\} = \log_2 8 = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2(-f(x-y)) + \log_2(-f(y-z)) + \log_2(-f(z-x)) = 3$$

$$\Leftrightarrow [\log_2(-f(x-y)) - 1] + [\log_2(-f(y-z)) - 1] + [\log_2(-f(z-x)) - 1] = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Đặt $\log_2(-f(x)) - 1 = g(x)$ thì $f(x) = -2^{g(x)+1}$ và $g(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó, đẳng thức trên trở thành

$$g(x-y) + g(y-z) + g(z-x) = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Điều này tương đương với

$$g(x-y) + g(y-z) = -g(-(x-y) - (y-z)), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta được

$$g(u) + g(v) = -g(-u-v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

Trong (18), thay $u = v = 0$, ta có

$$2g(0) = -g(0) \Leftrightarrow 3g(0) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 0.$$

Thay $v = 0$ vào (18), ta được

$$g(u) = -g(-u), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp điều này với (18), ta suy ra

$$g(u) + g(v) = g(u+v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Chú ý rằng g là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó, áp dụng kết quả của Bài toán 1, ta được

$$g(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì vậy, ta có

$$f(x) = -2^{g(x)+1} = -2^{ax+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = -2^{ax+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét.

- (1) Từ giả thiết của đề bài, chúng ta có thể chứng minh $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ theo hướng tiếp cận như sau. Giả sử tồn tại $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a) > 0, f(b) < 0$ thì khi đó, ta có $f(a) \cdot f(b) < 0$. Theo định lý giá trị trung gian thì tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho $f(x_0) = 0$. Thay y bởi $x - x_0$ trong (17), ta được

$$0 = f(x_0) f(x - x_0 - z) f(z - x + x_0) + 8 = 8.$$

Điều này là vô lí, do đó

$$f(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

hoặc

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tuy nhiên, nếu $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì

$$f(x-y)f(y-z)f(z-x) + 8 > 8 > 0, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vì vậy, ta có

$$f(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (2) Một câu hỏi được đặt ra trong lời giải trên là: “tại sao chúng ta logarit cơ số 2 cả hai vế của đẳng thức (17) mà không logarit theo cơ số khác?” Thực ra, chúng ta logarit theo cơ số nào cũng thu được kết quả như lời giải trên. Tuy nhiên, để thuận tiện trong việc biến đổi phía sau và chú ý rằng $8 = 2^3$ nên chúng ta mới logarit cả hai vế theo cơ số 2. Thật vậy, nếu chúng ta logarit cả hai vế của (17) theo cơ số 8 thì ta có

$$\left[\log_8(-f(x-y)) - \frac{1}{3} \right] + \left[\log_8(-f(y-z)) - \frac{1}{3} \right] + \left[\log_8(-f(z-x)) - \frac{1}{3} \right] = 0,$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$. Đặt $\log_8(-f(x)) - \frac{1}{3} = g(x)$ thì $f(x) = -8^{g(x)+\frac{1}{3}}$. Khi đó, ta được

$$g(x-y) + g(y-z) + g(z-x) = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Lập luận tương tự như lời giải trên, ta suy ra

$$g(x) = bx, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì vậy, ta có

$$f(x) = -8^{g(x)+\frac{1}{3}} = -8^{bx+\frac{1}{3}} = -8^{\frac{1}{3}ax+\frac{1}{3}} = -8^{\frac{1}{3}(ax+1)} = -2^{ax+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

với $a = 3b$.

Bài toán 7 (VMO 2016). *Tìm tất cả các số thực a để tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn*

i) $f(1) = 2016$.

ii) Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y+f(y)) = f(x) + ay. \quad (19)$$

Lời giải. Nếu $a = 0$ thì từ (19) ta được

$$f(x+2017) = f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó, f là một hàm tuần hoàn chu kỳ 2017. Vì $f(1) = 2016$ nên

$$f(x) = 2016, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta xét trường hợp $a \neq 0$ thì trong (19) hoán vị vai trò của x và y ta được

$$f(x + y + f(x)) = f(y) + ax, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (20)$$

Nếu $f(x) = f(y)$ thì từ (19) và (20) ta suy ra $x = y$ hay f là một đơn ánh. Trong (19) cho $y = 0$ ta có

$$f(x + f(0)) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì f là đơn ánh nên

$$x + f(0) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta có $f(0) = 0$. Trong (19) thay $x = 0, y = 1$ ta được $a = f(2017)$. Tiếp tục thay y bởi $-\frac{f(x)}{a}$ trong (19) ta được

$$f\left(x - \frac{f(x)}{a} + f\left(\frac{-f(x)}{a}\right)\right) = f(x) - f(x) = 0 = f(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì f là hàm đơn ánh nên

$$x - \frac{f(x)}{a} + f\left(\frac{-f(x)}{a}\right) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này suy ra

$$f\left(\frac{-f(x)}{a}\right) = \frac{f(x)}{a} - x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Trong (19) thay y bởi $-\frac{f(y)}{a}$ ta được

$$f\left(x - \frac{f(y)}{a} + f\left(\frac{-f(y)}{a}\right)\right) = f(x) - f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

Sử dụng (21) kết hợp với (22) ta có

$$f\left(x + \frac{f(y)}{a} - y - \frac{f(y)}{a}\right) = f(x) - f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta được

$$f(x - y) = f(x) - f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (23)$$

Trong (23) thay x bởi $x + y$ ta được

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ nhận xét của Bài toán 1, ta được

$$f(n) = nf(1) = 2016n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó

$$a = f(2017) = 2016 \cdot 2017.$$

Khi đó ta có hàm số $f(x) = 2016x$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Thật vậy, với

$$f(x) = 2016x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

thì

$$\begin{cases} f(1) = 2016 \\ f(x + y + f(x)) = 2016x + 2016.2017x = f(y) + ax, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vậy $a = 0$ và $a = 2016$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Nhận xét.

- (1) Trong bài toán này để tính được giá trị của hàm số tại điểm $x = 0$ chúng ta đã sử dụng tính đơn ánh của hàm số. Việc nhận ra f đơn ánh là dễ dàng. Sau khi đã tính được $f(0)$ thì việc thế các giá trị như thế nào để có thể “tận dụng” được kết quả $f(0) = 0$ là tự nhiên. Chúng ta nhắc lại các tính chất cơ bản của một hàm số thường được dùng xuyên suốt trong các bài toán giải phương trình hàm. Hàm số f đi từ miền xác định $D \subset \mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ được gọi là đơn ánh nếu $f(x) = f(y)$ thì $x = y$ với $\forall x, y \in D$. Hàm số f được gọi là toàn ánh nếu với $z \in \mathbb{R}$ tồn tại $x \in D$ sao cho $z = f(x)$. Hàm số f là song ánh nếu nó đồng thời là đơn ánh và toàn ánh.
- (2) Trong Bài toán 7, ở trường hợp $a \neq 0$, ta đã chứng minh được f là một cộng tính và do đó kết quả của Bài toán 1 vẫn được sử dụng trong bài toán này. Nếu bài toán có thêm giả thiết f là một hàm số liên tục hoặc đơn điệu trên tập xác định thì ta có thể kết luận hàm số $f(x) = 2016x, \forall x \in \mathbb{R}$, là nghiệm của phương trình trong trường hợp $a \neq 0$ vì hàm số f là một hàm cộng tính và $f(1) = 2016$. Chú ý rằng nếu phương trình hàm của bài toán là một phương trình có dạng “đối xứng” giữa các biến (ví dụ như Bài toán 7) ta thường dùng phép thế thay x bởi y và thay y bởi x , tức là hoán đổi vai trò của x, y trong phương trình ban đầu để có thể chứng minh được tính đơn ánh của hàm số cần tìm.

Kết quả ở phần nhận xét của Bài toán 1 tiếp tục được sử dụng trong bài toán tiếp theo nằm trong Đề thi chọn đội tuyển Quốc gia dự thi Olympic Toán Quốc tế của Mỹ (USA TST) năm 2012.

Bài toán 8 (USA TST 2012). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x + y^2) = f(x) + |yf(y)|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (24)$$

Lời giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn hệ thức của đề bài, khi đó ta có (24). Thay $x = 0$ vào (24), ta được

$$f(y^2) = f(0) + |yf(y)|, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (25)$$

Thay y bởi $-y$ vào (25), ta có

$$f(y^2) = f(0) + |-yf(-y)|, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp đẳng thức trên với (25), ta được

$$|yf(y)| = |-yf(-y)|, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Điều này suy ra

$$|f(y)| = |f(-y)|, \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

hay ta có

$$f^2(y) = f^2(-y), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

Thay x bởi $-y^2$ vào (24), ta được

$$f(0) = f(-y^2) + |yf(y)|, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp đẳng thức trên với (25), ta được

$$f(0) = f(-y^2) + f(y^2) - f(0), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Điều này tương đương với

$$2f(0) = f(-y^2) + f(y^2), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta được

$$2f(0) = f(-x) + f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (27)$$

Từ (26) và (27), ta có

$$[2f(0) - f(x)]^2 = f^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đẳng thức trên, ta được

$$4f^2(0) - 4f(0)f(x) + f^2(x) = f^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì vậy, ta có

$$f(0)[f(0) - f(x)] = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (28)$$

Nếu $f(0) \neq 0$ thì (28), ta được

$$f(x) = f(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp kết quả này với (24), ta được

$$f(0) = f(0) + |yf(y)|, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta có

$$|yf(y)| = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Điều này là vô lí. Như vậy, ta thu được

$$f(0) = 0.$$

Áp dụng kết quả này cho (25), ta được

$$f(y^2) = |yf(y)|, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (29)$$

Vì $f(0) = 0$ nên từ (27), ta có

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ (24) và (29), ta được

$$f(x + y^2) = f(x) + f(y^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \geq 0. \quad (30)$$

Với $\forall x \in \mathbb{R}$ và $\forall y < 0$ ta có

$$\begin{aligned} f(x + y) &= -f(-x - y) = -f(-x + (-y)) \\ &= -(f(-x) + f(-y)) \\ &= -(-f(x) - f(y)) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Kết hợp điều này với (30) ta được

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Như vậy, f là một hàm cộng tính. Từ (29) ta thấy rằng

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Do đó, với $\forall x \geq y$, ta có

$$f(x) = f(x - y + y) = f(x - y) + f(y) \geq f(y).$$

Điều này chứng tỏ, f là một hàm số tăng. Áp dụng nhận xét ở Bài toán 1, ta được $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó a là một hằng số. Chú ý rằng $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$. Từ đây, ta được $a \geq 0$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó a là một hằng số không âm thỏa mãn điều kiện đề bài. Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

với a là một hằng số không âm.

Nhận xét.

- (1) Nếu “thoạt nhìn” vào Bài toán 8 thì ta cảm thấy một chút “băn khoăn” vì đây là phương trình hàm có chứa dấu giá trị tuyệt đối. Nhưng nếu quan sát kĩ thêm một chút, ta thấy rằng cả hai vế của phương trình này đều chứa các hàm chẵn đối với biến y . Điều này gợi ý ngay cho ta việc thay y bởi $-y$ trong phương trình (24), để từ đó thu được đẳng thức (26).

(2) Sau khi chứng minh đẳng thức (27), ta đã “coi” $f(x)$ và $f(-x)$ là những biến số của một hệ phương trình gồm hai phương trình (26) và (27). Từ đây, bằng phương pháp thế, ta đã tìm ra được đẳng thức quan trọng (28). Phần chứng minh f là một hàm cộng tính và đơn điệu ở phần cuối cùng là cơ bản và khá quen thuộc.

(3) Dưới đây là một số bài toán liên quan.

i) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

ii) (Đề thi Olympic toán của Romania 2006). Giả sử $r, s \in \mathbb{Q}$ là hai số cho trước. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = f(x + r) + y + s, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

iii) (IMO 1992). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chúng ta thấy rằng cả bốn Bài toán 5, 6, 7 và 8 đều có chung một “mô hình” đó là chứng minh hàm số cần tìm là cộng tính và sử dụng những kết quả thu được ở Bài toán 1. Để kết thúc một lớp các bài toán có mô hình như vậy, chúng ta sẽ đến với bài toán sau đây nằm trong Đề thi chọn đội tuyển Quốc gia của Việt Nam dự thi Olympic Toán Quốc tế (VN TST) năm 2004.

Bài toán 9 (VN TST 2004). Tìm tất cả các số thực a sao cho tồn tại duy nhất hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 + y + f(y)) = [f(x)]^2 + ay, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (31)$$

Lời giải.

Ta thấy rằng nếu $a = 0$ thì có hai hàm số thỏa mãn phương trình (31) là $f(x) \equiv 0$ và $f(x) \equiv 1$. Tiếp theo, chúng ta sẽ xét $a \neq 0$. Do vế phải là hàm bậc nhất theo y nên có tập giá trị là $\mathbb{R}$, do đó ta được

$$\{f(x^2 + y + f(y)) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

Điều này dẫn đến

$$\{x^2 + y + f(y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

Do đó $\{f(y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, hay f là toàn ánh. Vì vậy, tồn tại $b \in \mathbb{R}$ sao cho $f(b) = 0$. Ta sẽ chứng minh nếu $f(x) = 0$ thì $x = 0$. Từ (31) lấy $y = b$ ta được

$$f(x^2 + b) = [f(x)]^2 + ab, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (32)$$

Từ (32) thay x bởi $-x$ ta có

$$f(x^2 + b) = [f(-x)]^2 + ab, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (32) ta được

$$[f(x)]^2 = [f(-x)]^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này suy ra

$$|f(x)| = |f(-x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (33)$$

Từ (33) suy ra $f(-b) = 0$. Từ (31) lấy $y = -b$ ta được:

$$f(x^2 - b) = [f(x)]^2 - ab, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (34)$$

Từ (32) và (34) ta có

$$f(x^2 + b) - f(x^2 - b) = 2ab, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (35)$$

Từ (35) lấy $x = 0$ ta được

$$f(b) - f(-b) = 2ab.$$

Vì $f(b) = f(-b)$ nên $2ab = 0$. Do đó ta phải có $b = 0$. Vậy ta thu được tính chất $f(0) = 0$ và nếu $f(x) = 0$ thì $x = 0$, cũng từ tính chất này ta có nếu $x \neq 0$ thì $f(x) \neq 0$. Từ (31) cho $y = 0$ ta được

$$f(x^2) = [f(x)]^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (36)$$

Từ (36) ta lấy $x = 1$ được

$$f(1) = f^2(1) \Rightarrow f(1) = 1.$$

Trong (31) cho $y = 1$ ta được:

$$\begin{aligned} f(x^2 + 2) &= [f(x)]^2 + a \\ &= f(x^2) + a, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (37)$$

Thay $x = 0$ vào (37) ta được $a = f(2)$. Do vậy

$$a^2 = f^2(2) = f(2^2) = f(4) = f\left(\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\right) = f(2) + a = 2a.$$

Do đó, ta phải có $a = 2$. Khi đó (31) trở thành

$$f(x^2 + y + f(y)) = [f(x)]^2 + 2y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (38)$$

Từ (38) lấy $y = -\frac{[f(x)]^2}{2}$ ta được:

$$f\left(x^2 - \frac{[f(x)]^2}{2} + f\left(-\frac{[f(x)]^2}{2}\right)\right) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì vậy

$$x^2 - \frac{[f(x)]^2}{2} + f\left(-\frac{[f(x)]^2}{2}\right) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta được

$$f\left(-\frac{[f(x)]^2}{2}\right) = -x^2 + \frac{[f(x)]^2}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (39)$$

Từ (38) thay y bởi $-\frac{[f(y)]^2}{2}$ ta được:

$$f\left(x^2 - \frac{[f(y)]^2}{2} + f\left(-\frac{[f(y)]^2}{2}\right)\right) = [f(x)]^2 - [f(y)]^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (40)$$

Từ (40) sử dụng (39) ta có

$$f\left(x^2 - \frac{[f(y)]^2}{2} - y^2 + f\left(-\frac{[f(y)]^2}{2}\right)\right) = [f(x)]^2 - [f(y)]^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vì vậy, ta được

$$f(x^2 - y^2) = f(x^2) - f(y^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (41)$$

Từ (41) lấy $x = 0$ ta được

$$f(-y^2) = -f(y^2), \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

Từ đây, ta suy ra

$$f(t) = -f(-t), \quad \forall t \geq 0. \quad (42)$$

Với $t < 0$ thì $-t > 0$, sử dụng (42) ta thu được $f(-t) = -f(t)$. Kết hợp với (42) ta có

$$f(-t) = -f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

hay f là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$. Từ đây kết hợp với (41) ta được:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \text{với } x \geq 0, y \leq 0 \quad (43)$$

Từ (43) cũng có:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \text{với } x \leq 0, y \geq 0. \quad (44)$$

Nếu $x > 0$ và $y > 0$ thì

$$f(x + y) = f(x - (-y)) = f(x) - f(-y) = f(x) + f(y). \quad (45)$$

Nếu $x < 0$ và $y < 0$ thì theo (45) ta có $f(-x - y) = f(-x) + f(-y)$, suy ra

$$-f(x + y) = -f(x) - f(y) \Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{với } x < 0, y < 0. \quad (46)$$

Từ (43), (44), (45), (46) ta được

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (47)$$

Sử dụng (36) và (47) ta có kết quả sau

$$[f(x+y)]^2 = f((x+y)^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (48)$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned} [f(x+y)]^2 &= [f(x) + f(y)]^2 \\ &= f^2(x) + 2f(x)f(y) + f^2(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (49)$$

và

$$\begin{aligned} f((x+y)^2) &= f(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= f(x^2) + f(2xy) + f(y^2) \\ &= f^2(x) + 2f(xy) + f^2(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (50)$$

Từ (48), (49) và (50), ta có

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vì $f(-y^2) = -f(y^2)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, nên

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Từ đó, với $x > y \geq 0$, ta được

$$f(x) - f(y) = f(x-y) > 0, \quad \forall x > y \geq 0.$$

Do f là một hàm lẻ nên điều này chứng tỏ rằng, f là một hàm tăng trên $\mathbb{R}$. Từ tính cộng tính của hàm số f , ta được $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$. Kết hợp với tính chất nhân tính của hàm số f , ta thấy rằng

$$a = 0 \quad \text{hoặc} \quad a = 1.$$

Vì $f(1) = 1$ nên ta có

$$f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện của bài toán. Vậy $a = 2$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét.

- (1) Bài toán này thuộc lớp các bài toán xác định tham số để phương trình hàm đã cho có nghiệm hoặc một lớp nghiệm thỏa mãn một điều kiện nào đó. Quan sát thấy rằng nếu $f(x) = x$ là nghiệm hàm thì sẽ dẫn đến $a = 2$. Và chúng ta mong muốn chứng minh rằng đây là hàm số duy nhất. Điều kiện về tính duy nhất nghiệm đã giúp ta loại bỏ được trường hợp $a = 0$.

- (2) Chúng ta thấy rằng về mặt ý tưởng xây dựng, kết cấu cũng như hình thức, thì Bài toán số 9 và Bài toán số 7 có nhiều nét tương đồng. Đây là một bài toán hay và khó, để giải quyết được bài toán này, học sinh phải nắm vững các tính chất cơ bản của hàm số, kết hợp với kinh nghiệm khi sử dụng các phép thế giải quyết các bài toán về phương trình hàm. Ở chứng minh phần cuối của bài toán, chúng ta tiếp tục sử dụng kết quả thu được từ Bài toán 1.
- (3) Bài toán số 9 thực ra là kết quả tổng quát của bài toán dưới đây, được đăng trong phần đề ra kì này của tạp chí “The American Mathematical Monthly” (AMM) tháng 2, năm 2001.

(AMM, 2001). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 + y + f(y)) = [f(x)]^2 + 2y,$$

với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.

Bài toán 10 (IMO 2002). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz), \quad \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}. \quad (51)$$

Lời giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn hệ thức của đề bài, khi đó ta có (51). Thay $x = y = z = 0$ vào (51), ta được

$$2f(0) = 2f(0)(f(0) + f(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (52)$$

Thay $t = 0$ vào đẳng thức trên, ta suy ra

$$2f(0) = 4f^2(0) \Leftrightarrow 2f(0)[1 - 2f(0)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0, \\ f(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Đến đây, ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. $f(0) = \frac{1}{2}$. Khi đó, từ (52), ta được

$$1 = f(0) + f(t) = \frac{1}{2} + f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$f(x) = \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp 2. $f(0) = 0$. Khi đó, thay $z = t = 0$ vào (51), ta có

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (53)$$

Thay $x = y = 1$ vào đẳng thức trên, ta suy ra

$$f(1) = f^2(1) \Leftrightarrow f(1)[1 - f(1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0, \\ f(1) = 1. \end{cases}$$

Nếu $f(1) = 0$ thì trong (53) thay $y = 1$, ta được

$$f(x) = f(x)f(1) = 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Tiếp theo, ta xét $f(1) = 1$. Trong (51) lấy $x = 0$ và $y = t = 1$ ta có

$$f(-z) + f(z) = 2f(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Thay z bởi $-z$ trong đẳng thức trên, ta được

$$f(z) + f(-z) = 2f(-z), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta có

$$f(z) = f(-z), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Điều này chứng tỏ f là một hàm số chẵn. Tiếp theo, thay y bởi x và $z = t = 0$ trong (51), ta được

$$f(x^2) = [f(x)]^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đẳng thức trên suy ra

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (54)$$

Ta sẽ chứng minh hệ thức sau bằng phương pháp qui nạp toán học theo n

$$f(n) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (55)$$

Vì $f(0) = 0$ nên ta thấy rằng đẳng thức trên đúng với $n = 0$. Giả sử đẳng thức (55) đúng với $n = k$ với $k \in \mathbb{N}^*$, tức là $f(k) = k^2$. Khi đó thay $x = k, y = z = t = 1$ trong (51), ta được

$$f(k-1) + f(k+1) = 2[f(k) + 1].$$

Điều này tương đương với

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 2[f(k) + 1] - f(k-1) \\ &= 2(k^2 + 1) - (k-1)^2 \\ &= 2k^2 + 2 - k^2 + 2k - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2. \end{aligned}$$

Do đó đẳng thức (55) đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, đẳng thức (55) đúng với $\forall n \in \mathbb{N}$. Như vậy, ta đã chứng minh được đẳng thức (55). Chú ý rằng, f là hàm số chẵn. Vì vậy từ (55), ta được

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Mặt khác, với $n \in \mathbb{N}^*$, từ (53) ta được

$$1 = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) f\left(\frac{1}{n}\right) = f(n) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = n^2 \cdot f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Do đó, ta có

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Với $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ và $n > 0$, sử dụng (53) và đẳng thức trên, ta được

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = f(m)f\left(\frac{1}{n}\right) = m^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

Do đó, ta có

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{Q}. \quad (56)$$

Thay y bởi x , z bởi t trong (51), ta có

$$f(x^2 + y^2) = [f(x) + f(y)]^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (57)$$

Xét $u \geq v \geq 0$. Khi đó, tồn tại x_0, y_0 sao cho

$$v = y_0^2, \quad u = x_0^2 + y_0^2.$$

Thay $x = x_0, y = y_0$ vào (57) và sử dụng (54), ta được

$$\begin{aligned} f(u) &= f(x_0^2 + y_0^2) = [f(x_0) + f(y_0)]^2 \\ &= [f(x_0)]^2 + 2f(x_0)f(y_0) + [f(y_0)]^2 \\ &\geq f(x_0^2) = f(v). \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ f là một hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^+$. Với $x \in \mathbb{R}^+$, tồn tại hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ và $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$0 < u_n \leq x \leq v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

và

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = x.$$

Vì f là một hàm số đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^+$ nên ta có

$$f(u_n) \leq f(x) \leq f(v_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Kết hợp điều này với (56) ta được

$$u_n^2 \leq f(x) \leq v_n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Cho $n \rightarrow +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được

$$x^2 \leq f(x) \leq x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Điều này chứng tỏ rằng

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Vì f là một hàm số chẵn nên ta có

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại, ta thấy các hàm số $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ đều thỏa mãn điều kiện của đề bài. Vậy các hàm số cần tìm là

$$f(x) = \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

và

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét.

- (1) Ta thấy rằng quá trình tìm nghiệm $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ trong bài toán trên giống hệt với quá trình tìm nghiệm liên tục ở Bài toán 1. Tức là, chúng ta bắt đầu tìm nghiệm trong tập số tự nhiên $\mathbb{N}$, sau đó mở rộng kết quả đó lên tập số nguyên $\mathbb{Z}$, rồi đến tập số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ và cuối cùng là tập số thực $\mathbb{R}$. Rõ ràng là tính trù mật của tập số hữu tỷ trong tập số thực đóng vai trò then chốt trong việc mở rộng kết quả từ $\mathbb{Q}$ lên $\mathbb{R}$ trong cả hai bài toán.
- (2) Chú ý rằng trên $\mathbb{R}^+$, hàm x^2 có hàm ngược là $\sqrt{x}$. Do đó, ngoài cách lập luận để tìm nghiệm $f(x) = x^2$ như trình bày trong lời giải trên, chúng ta có thể thực hiện một cách ngắn gọn như sau.

Giả sử tồn tại $x > 0$ mà $0 \leq f(x) \neq x^2$. Ta xét hai trường hợp sau.

- i) Nếu $0 \leq f(x) < x^2$, thì khi đó lấy số hữu tỉ a thỏa mãn

$$x > a > \sqrt{f(x)}.$$

Vì f là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^+$ nên ta được

$$f(x) > f(a) = a^2 > (\sqrt{f(x)})^2 = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Điều này là mâu thuẫn.

- ii) Nếu $f(x) > x^2$ thì chứng minh tương tự như trường hợp trên, ta cũng suy ra điều mâu thuẫn.

Do đó điều giả sử là sai. Vì vậy, ta được

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (3) Đẳng thức trên có thể được lấy cảm hứng từ đẳng thức nổi tiếng sau đây

$$(x^2 + z^2)(y^2 + t^2) = (xy - zt)^2 + (xt + yz)^2,$$

Đây là đẳng thức thường được sử dụng để nghiên cứu tổng của hai bình phương trong lý thuyết số.

Lời cảm ơn

Tác giả chân thành cảm ơn ThS. Hà Tuấn Dũng, người đã trực tiếp và tận tình hướng dẫn tác giả trong quá trình viết bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monographie Mat. PWN, Warsaw, 1932. 1
- [2] H. Blumberg.: On convex functions. Trans. Am. Math. Soc. **20**, 40-44, 1919. 1
- [3] N. T. Chung, *Chuyên khảo phương trình hàm*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2014.
- [4] N. T. Chung, *Những cặp phương trình hàm*, Pleiku, 25-12-2019.
- [5] A. L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique, I Partie: Analyse algébrique*, De l'Imprimerie Royale, Paris, 1821. 1
- [6] V. Q. B. Cẩn, N. D. Khoa, *Áp dụng dãy số vào giải phương trình và bất phương trình hàm*, Tạp chí Epsilon, số 05, 10/2015.
- [7] T. N. Dũng, V. Q. B. Cẩn, T. Q. Hùng và L. P. Lữ, *Lời giải và bình luận đề thi Học sinh giỏi Quốc gia môn Toán năm 2016*, <https://diendantoanhoc.net/>.
- [8] G. Darboux, *Sur la composition des forces en statique*, Bull. Sci. Math. **9**, 281-288, 1875. 1
- [9] Diễn đàn Art of Problem Solving. <https://artofproblemsolving.com/>
- [10] M. Fréchet, *Pri la funkcia ekvacio $f(x+y) = f(x) + f(y)$* , Enseign. Math. **15**, 390-393, 1913. 1
- [11] G. Hamel, *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$* , Math. Ann. **60**, 459-462, 1905. 1
- [12] IMO Shortlists 2002.
- [13] M. Kormes, *On the functional equation $f(x+y) = f(x) + f(y)$* , Bull. Am. Math. Soc. **32**, 689-693, 1926. 1
- [14] P. N. A. Khoa, *Phương trình hàm trên tập số thực*, Đà Nẵng, 2019.
- [15] M. R. Mehdi, *On convex functions*, J. Lond. Math. Soc. **39**, 321-326, 1964. 1
- [16] N. V. Mậu, *Phương trình hàm*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1996.
- [17] C. G. Small, *Functional Equations and How to Solve Them*, Springer, 2007.
- [18] D. Reem, *Remarks on the Cauchy functional equation and variations of it*, Aequat. Math. **91**, 237-264, 2017. 2



NGUYÊN LÝ BAO HÀM VÀ LOẠI TRỪ SỬ DỤNG TRONG CÁC BÀI TOÁN ĐẾM

Nguyễn Văn Đạt - K43A SPT
Khoa Toán, ĐHSP Hà Nội 2

Tóm tắt. Trong lý thuyết tổ hợp, ta đã biết đến với nguyên lý cộng, đây là một nguyên lý đơn giản để đếm số phần tử của một hợp các tập hợp với giả thiết các tập hợp không có sự trùng lặp các phần tử được biểu diễn dưới dạng tập hợp như sau

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Ngược lại, nếu A và B là các tập hợp có chứa các phần tử chung thì ta có công thức

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

nghĩa là để đếm tổng số phần tử của hai tập hợp này, ta phải “loại trừ” đi một lần số phần tử thuộc cả hai tập hợp. Phương pháp đếm ở trên là một dạng đơn giản của nguyên lý bao hàm và loại trừ, một phương pháp rất cơ bản để giải quyết các bài toán đếm. Trong bài viết này, tác giả muốn giới thiệu chi tiết hơn tới bạn đọc về nguyên lý này cũng như một vài ứng dụng của nó để giải quyết một số bài toán đếm.

1. NGUYÊN LÝ BAO HÀM VÀ LOẠI TRỪ

Nguyên lý bao hàm và loại trừ được xem như nguyên lý tổng quát của nguyên lý cộng. Nguyên lý này được biết đến dưới nhiều dạng khác nhau. Dạng kinh điển của nguyên lý này được phát biểu thông qua Định lý sau:

Định lý 1.1 (Nguyên lý bao hàm và loại trừ dạng kinh điển). Cho $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các tập hữu hạn. Khi đó

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

Bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh Định lý 1.1 bằng phương pháp quy nạp hay bằng chính phương pháp đếm số phần tử của hợp n tập hợp $A_i, i = \overline{1, n}$ ở trên với lưu ý số các giao của k tập hợp lấy từ n tập hợp bằng C_n^k .

Định lý sau phát biểu một dạng tổng quát của nguyên lý này dựa trên trọng lượng của các vật với tính chất cho trước nào đó.

Định lý 1.2 (Nguyên lý bao hàm và loại trừ dạng tổng quát). Xét n vật $a_1, a_2, \dots, a_n$ với các trọng lượng $\omega(a_1), \omega(a_2), \dots, \omega(a_n)$, mỗi vật a_i đã cho có thể nhận một số tính chất nào đó trong các tính chất $A_1, A_2, \dots, A_n$. Ký hiệu:

- i) $M(r)$ là tổng trọng lượng của các vật có chính xác r tính chất,
- ii) $M(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k})$ là tổng trọng lượng của tất cả các vật có tính chất $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$.

Khi đó

$$M(r) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} C_k^r S_k,$$

và

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} M(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}).$$

Bạn đọc có thể tìm hiểu về cách chứng minh Định lý này trong tài liệu [6].

Bên cạnh đó, ta cũng đã biết, xét về mặt tập hợp, mỗi kết quả của một phép thử hữu hạn (chính là các biến cố ngẫu nhiên) cũng là một tập hợp con của không gian mẫu, vậy nên trong lý thuyết xác suất, Nguyên lý bao hàm và loại trừ còn được biết đến thông qua công thức sau:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) \\ &\quad + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n), \end{aligned}$$

trong đó $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các biến cố liên quan đến cùng một phép thử và $P(A_i)$ là xác suất của biến cố A_i tương ứng.

2. ỨNG DỤNG CỦA NGUYÊN LÝ TRONG CÁC BÀI TOÁN ĐẾM

Trong mục này, tác giả tập trung vào việc giới thiệu nguyên lý bao hàm và loại trừ dạng kinh điển và cách vận dụng nguyên lý dạng này trong các bài toán đếm ở cấp trung học cơ sở, trung học phổ thông hay các Kỳ thi chọn học sinh giỏi cấp Tỉnh, Quốc gia, Khu vực và Quốc tế.

Hơn nữa, khi giải các bài toán đếm, ta hay gặp các bài toán có dạng “Đếm xem có bao nhiêu phần tử của một tập X cho trước, không thỏa mãn bất kỳ một tính chất nào đã cho”. Khi đó, nếu ta “đồng nhất” tập A_k với tính chất α_k nào đó trên tập X và gọi N là tổng số phần tử của X , $\overline{N}$ là số cách cần đếm thì ta có công thức sau đây

$$\overline{N} = N - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = N - N_1 + N_2 - \dots + (-1)^n N_n,$$

với N_k là tổng phần tử của tất cả các giao của k tập hợp lấy từ n tập hợp đã cho.

Cụ thể, giả sử ta cần đếm số phần tử trong tập hợp X không thỏa mãn bất kỳ tính chất $\alpha_k, k = 1, 2, \dots, n$. Khi đó, ta ký hiệu

$$X_k = \{x \in X | x \text{ thỏa mãn tính chất } \alpha_k\}.$$

Khi đó, phần bù của X_k là

$$\overline{X}_k = \{x \in X | x \text{ không thỏa mãn tính chất } \alpha_k\}.$$

Gọi N là số phần tử cần đếm, ta có

$$N = |\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2 \cap \dots \cap \overline{X}_n| = |X| - |X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n|. \quad (1)$$

Công thức này được sử dụng rộng rãi để giải lớp các bài tập về đếm số phần tử thỏa mãn các tính chất số học, xác định nghiệm nguyên, đếm số toàn ánh, tìm số xáo trộn của một hoán vị có n phần tử,...

Để minh họa cho những ứng dụng của nguyên lý bao hàm và loại trừ, tiếp theo chúng tôi sẽ đưa ra một số các ví dụ mà ở đó nguyên lý này đóng vai trò chủ chốt trong việc giải quyết các bài toán.

Bài toán 1. *Tìm số các số nguyên trong tập $X = \{1, 2, \dots, 10000\}$ thỏa mãn rằng các số đó không chia hết cho bất cứ số nào trong 3, 4 và 7.*

Lời giải. Gọi gọi X_1, X_2, X_3 lần lượt là các tập hợp số chia hết cho 3, 4 và 7. Khi đó, ta thấy rằng $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3$ lần lượt là các tập hợp số không chia hết cho 3, 4 và 7. Vì vậy, ta cần đi tính $\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2 \cap \overline{X}_3$ là tập hợp các số không chia hết cho cả 3, 4 và 7. Theo công thức (1), ta có

$$N = |\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2 \cap \overline{X}_3| = |X| - |X_1 \cup X_2 \cup X_3|.$$

Áp dụng nguyên lý bao hàm và loại trừ, ta được

$$\begin{aligned} & |X_1 \cup X_2 \cup X_3| \\ &= |X_1| + |X_2| + |X_3| - |X_1 \cap X_2| - |X_2 \cap X_3| - |X_1 \cap X_3| + |X_1 \cap X_2 \cap X_3|. \end{aligned} \quad (2)$$

Ta thấy rằng

$$(3, 4) = (4, 7) = (3, 7) = (3, 4, 7) = 1.$$

Do đó, ta có

$$X_1 \cap X_2 = \left\{x \mid x \div 3 \text{ và } x \div 4\right\} = \left\{x \mid x \div 12\right\},$$

$$X_1 \cap X_3 = \left\{y \mid y \div 3 \text{ và } y \div 7\right\} = \left\{y \mid y \div 21\right\},$$

$$X_2 \cap X_3 = \left\{z \mid z \div 4 \text{ và } z \div 7\right\} = \left\{z \mid z \div 28\right\},$$

và

$$X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \left\{t \mid t \div 3; t \div 4 \text{ và } t \div 7\right\} = \left\{t \mid t \div 84\right\}.$$

Chú ý rằng, với mỗi số nguyên m thì các số trong X chia hết cho m là $\left[\frac{10000}{m}\right]$ (phần nguyên của $\frac{10000}{m}$). Vì vậy, ta được

$$|X_1| = 3333, |X_2| = 2500, |X_3| = 1428,$$

$$|X_1 \cap X_2| = 833, |X_2 \cap X_3| = 476, |X_1 \cap X_3| = 357,$$

và

$$|X_1 \cap X_2 \cap X_3| = 119, \quad |X| = 10000.$$

Từ các kết quả trên, ta được

$$N = 10000 - 3333 - 2500 - 1428 + 833 + 476 + 357 - 119 = 4286.$$

Nhận xét.

(1) Sử dụng kĩ thuật tương tự, ta có thể giải bài toán tổng quát sau.

“Cho n là số nguyên dương và k số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_k$ đôi một nguyên tố cùng nhau. Tìm các số nguyên dương $a \leq n$ sao cho a không chia hết cho a_i với mọi $i = 1, 2, \dots, k$ ”.

(2) Nhận xét i) đòi hỏi giả thiết $a_1, a_2, \dots, a_k$ đôi một nguyên tố cùng nhau. Lời giải của bài toán sẽ thay đổi ra sao nếu ta bỏ đi giả thiết đó? Câu hỏi này, tác giả xin dành cho bạn đọc.

Bài toán 2. Cho m quả cầu đôi một khác nhau và n cái hộp đôi một khác nhau ($m \geq n$). Có bao nhiêu cách bỏ tất cả các quả cầu vào trong các hộp sao cho hộp nào cũng có ít nhất 1 quả cầu (không kể thứ tự các quả cầu trong mỗi hộp)?

Lời giải. Gọi A là số cách bỏ cầu vào hộp thỏa mãn điều kiện bài toán. Với mỗi $i = 1, 2, \dots, n$ ta kí hiệu A_i là số cách bỏ cầu vào hộp mà A_i không chứa quả cầu. S là tập hợp tất cả các cách bỏ cầu vào hộp. Khi đó, ta được

$$|A| = |S| - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|.$$

Ta dễ thấy số cách bỏ ngẫu nhiên x quả cầu vào y hộp với điều kiện số lượng cầu trong mỗi hộp không hạn chế và không kể thứ tự các quả cầu trong mỗi hộp là y^x . Thật vậy, quả cầu thứ nhất có y cách bỏ vào hộp, quả cầu thứ hai có y cách bỏ vào hộp (hộp nào cũng được, kể cả hộp có cầu),... Tương tự như vậy thì đến quả cầu thứ x cũng có y cách bỏ vào hộp. Theo quy tắc nhân thì có

$$y \cdot y \cdots y = y^x$$

cách bỏ hết quả cầu vào hộp. Từ trên, ta suy ra với $i, j = 1, 2, \dots, n$, ta có

$$|S| = n^m, |A_i| = (n-1)^m \quad (\text{bỏ } m \text{ quả cầu vào } n-1 \text{ cái hộp khác hộp } A_i),$$

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)^m \quad (\text{bỏ } m \text{ quả cầu vào } n-2 \text{ cái hộp khác hộp } A_i \text{ và } A_j, \forall i \neq j).$$

Tương tự như vậy, ta được

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n - k)^m \text{ với } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n.$$

Khi đó, áp dụng nguyên lý bao hàm loại trừ dạng tổng quát ta được:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{i=1}^n (n-1)^m - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} (n-2)^m + \dots + (1)^{n-2} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \leq n} [n - (n-1)]^m \\ &= C_n^1 (n-1)^m - C_n^2 (n-2)^m + \dots + (-1)^{n-2} C_n^{n-1}. \end{aligned}$$

Vì vậy, số cách bỏ thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$\begin{aligned} |A| &= n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m + \dots + (-1)^{n-2} C_n^{n-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_n^i (n-1)^m. \end{aligned}$$

Nhận xét.

(1) Khi giải bài toán này, học sinh có thể dễ mắc sai lầm như sau.

“Đầu tiên bỏ vào mỗi hộp một quả cầu. Khi đó, ta có A_m^n cách, sau đó phân phối ngẫu nhiên $m - n$ số cầu còn lại vào n cái hộp thì có n^{m-n} cách và kết luận có tất cả $A_m^n \cdot n^{m-n}$ cách.”

Tuy nhiên, cách giải trên đã mắc sai lầm vì ta “không kể thứ tự của các quả cầu trong mỗi hộp”. Do đó, để giải quyết bài toán này thì ta cần sử dụng nguyên lý bao hàm và loại trừ.

(2) Bản chất của bài toán trên là câu hỏi “Có bao nhiêu toàn ánh $f : X \rightarrow Y$, trong đó X có m phần tử còn Y có n phần tử, $m \geq n$.” Bạn đọc có thể tham khảo thêm ở tài liệu [5] về ứng dụng nguyên lý bao hàm và loại trừ vào bài toán đếm số các toàn ánh.

Sau đây là một số bài toán sử dụng dạng đơn giản của nguyên lý bao hàm và loại trừ với nhiều hơn hai tập hợp.

Bài toán 3. Trong một lớp có 40 sinh viên đăng ký làm khóa luận, trong đó:

- 20 sinh viên đủ điều kiện làm khóa luận chuyên ngành Toán giải tích,
- 21 sinh viên đủ điều kiện làm khóa luận chuyên ngành Hình học,
- 22 sinh viên đủ điều kiện làm khóa luận chuyên ngành Toán ứng dụng,
- 8 sinh viên đủ điều kiện làm khóa luận chuyên ngành Toán giải tích và Hình học,
- 11 sinh viên đủ điều kiện làm khóa luận chuyên ngành Hình học và Toán ứng dụng,
- 5 sinh viên đủ điều kiện làm khóa luận cả 3 chuyên ngành.

Biết rằng mỗi sinh viên trong lớp đủ điều kiện đăng ký ít nhất một chuyên ngành. Tìm số sinh viên đủ điều kiện đăng ký cả 2 chuyên ngành Toán giải tích và Toán ứng dụng.

Lời giải. Gọi A, B, C lần lượt là tập hợp số sinh viên đủ điều kiện đăng ký làm khóa luận chuyên ngành Toán giải tích, Hình học, Toán ứng dụng. Khi đó theo đề bài, ta có

$$|A \cup B \cup C| = 40,$$

$$|A| = 20, |B| = 21, |C| = 22,$$

và

$$|A \cap B \cap C| = 5, |A \cap B| = 8, |B \cap C| = 11.$$

Áp dụng nguyên lý bao hàm và loại trừ cho 3 tập A, B, C và sử dụng các kết quả ở trên, ta được

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ \Leftrightarrow 40 &= 20 + 21 + 22 - 8 - 11 - |A \cap C| + 5 \\ \Leftrightarrow |A \cap C| &= 20 + 21 + 22 - 8 - 11 + 5 - 40 = 9. \end{aligned}$$

Vậy có 9 sinh viên đủ điều kiện đăng ký làm khóa luận 2 chuyên ngành Toán giải tích và Toán ứng dụng.

Nguyên lý bao hàm và loại trừ cũng được sử dụng cho một số bài toán đếm số chuỗi bits, xâu nhị phân. Chúng ta cùng đến với bài toán sau, nằm trong Đề thi Cao học của Đại học Công nghệ Thông tin Thành phố Hồ Chí Minh vào tháng 5 năm 2001.

Bài toán 4. Tìm số các chuỗi 8 bits thỏa mãn điều kiện: bit bắt đầu bởi 1 hay 2 bit kết thúc bởi 0.

Lời giải. Gọi A là số chuỗi 8 bits có bit bắt đầu bởi 1, B là số chuỗi 8 bits có 2 bit kết thúc bởi 0. Bây giờ, ta đi tính $N(A), N(B)$. Gọi

$$S = s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8$$

là chuỗi 8 bits có bit bắt đầu bởi 1. Vậy s_1 có 1 trường hợp, s_i ($i = 2, 3, \dots, 8$) có 2 trường hợp là 0 hoặc 1. Theo nguyên lý nhân, ta có

$$N(A) = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7.$$

Tương tự, ta được

$$N(B) = 2^6, N(A \cap B) = 2^5.$$

Theo nguyên lý bao hàm và loại trừ, số các chuỗi thỏa mãn bit bắt đầu bởi 1 hay 2 bit kết thúc bởi 0 là

$$\begin{aligned} N(A \cup B) &= N(A) + N(B) - N(A \cap B) \\ &= 2^7 + 2^6 - 2^5 = 160. \end{aligned}$$

Nhận xét. Bạn đọc có thể dùng cách làm tương tự để giải các ví dụ sau.

Ví dụ 1. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 hoặc là bắt đầu bởi 00 hoặc là kết thúc bởi 11?

Ví dụ 2. Có bao nhiêu xâu có độ dài 10 được tạo ra từ tập $\{a, b, c\}$ thỏa mãn ít nhất một trong hai điều kiện:

- Chứa đúng 3 chữ a và chúng phải đứng cạnh nhau
- Chứa đúng 4 chữ b và chúng phải đứng cạnh nhau

Hướng dẫn giải Ví dụ 2. Ta gọi A là số xâu có độ dài 10 có chứa đúng 3 chữ a đứng cạnh nhau, B là số xâu có độ dài 10 có chứa đúng 4 chữ b đứng cạnh nhau. Khi đó $A \cup B$ là số xâu mà ta phải tìm. Từ đây, ta được

$$N(A) = 8 \cdot 2^7, N(B) = 7 \cdot 2^6, N(A \cap B) = \frac{5!}{1! \cdot 3! \cdot 1!} = 4 \cdot 5 = 20.$$

Áp dụng nguyên lý bao hàm loại trừ và tìm ra được số xâu là 2476.

Nguyên lý bao hàm và loại trừ cũng được sử dụng hiệu quả trong việc đếm số nghiệm nguyên không âm của một phương trình. Sau đây là một vài bài toán minh họa.

Bài toán 5. *Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình*

$$x + y + z = 10$$

với $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 6$.

Lời giải. Gọi A là tập tất cả các nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x + y + z = 10.$$

Khi đó, ta được

$$|A| = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{3+10-1}^{3-1} = C_{12}^2 = 66.$$

Tiếp theo, gọi:

- A_1 là tập nghiệm với $x > 2, y \geq 0, z \geq 0$,
- A_2 là tập nghiệm với $x \geq 0, y > 4, z \geq 0$,
- A_3 là tập nghiệm với $x \geq 0, y \geq 0, z > 6$.

Khi đó theo nguyên lý bao hàm và loại trừ, số nghiệm thỏa mãn đề bài là

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |A| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_3 \cap A_1| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Ta thấy A_1 là tập nghiệm với $x > 2, y \geq 0, z \geq 0$, đặt

$$x' = x - 3, y' = y, z' = z.$$

Với cách đặt trên, phương trình đã cho tương đương với

$$x' + y' + z' = 7,$$

trong đó $x' \geq 0, y' \geq 0, z' \geq 0$. Điều này suy ra

$$|A_1| = C_9^2 = 36.$$

Tương tự, ta được

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0,$$

$$|A_2| = C_7^2 = 21, |A_3| = C_5^2 = 10,$$

$$|A_1 \cap A_2| = C_4^2 = 6, |A_2 \cap A_3| = 0, |A_1 \cap A_3| = C_2^2 = 1.$$

Vậy số nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 66 - 36 - 21 - 10 + 6 + 1 + 0 - 0 = 6.$$

Nhận xét. Bài toán trên ta có thể tìm nghiệm nguyên không âm bằng phương pháp liệt kê như sau:

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow x \in A = \{0; 1; 2\},$$

$$0 \leq y \leq 4 \Rightarrow y \in B = \{0; 1; 2; 3; 4\},$$

$$0 \leq z \leq 6 \Rightarrow z \in C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Khi đó bộ nghiệm (x, y, z) thỏa mãn yêu cầu bài toán gồm

$$(0; 4; 6), (1; 4; 5), (1; 3; 6), (2; 2; 6), (2; 3; 5), (2; 4; 4).$$

Nhìn qua ta có thể thấy làm cách liệt kê này rất nhanh, tuy nhiên với những bài nhiều nghiệm thì ta lại không thể liệt kê được hết, hoặc là mất nhiều thời gian. Vì vậy ưu điểm của nguyên lý bao hàm và loại trừ ở đây là ta có thể giải với những bài toán nhiều nghiệm, hoặc những bài tổng quát đến n nghiệm.

Với những bài toán đếm số được lập từ một bộ số cho trước, nguyên lý bao hàm và loại trừ cũng phát huy nhiều ưu thế. Để minh họa cho điều này, chúng ta cùng đến với bài toán sau, nằm trong Đề thi học sinh giỏi toán Quốc gia của Việt Nam (VMO), bảng B, năm 1995.

Bài toán 6. Hỏi từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số có 10 chữ số thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) Trong mỗi số, mỗi chữ số có mặt đúng hai lần,

ii) Trong mỗi số, hai chữ số giống nhau không đứng cạnh nhau.

Lời giải. Gọi s là tập số cần tìm và A là tập gồm tất cả các số có 10 chữ số lập được từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5$ thỏa mãn điều kiện i) của đề bài. Khi đó, ta có

$$|A| = \frac{10!}{2^5} = 113400.$$

Kí hiệu A_i là tập hợp các số thuộc A sao cho mỗi số đều có 2 chữ số i đứng cạnh nhau ($i = \overline{1, 5}$). Với $i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5$ ta được

$$|A_i| = \frac{9!}{2^4} = 22680,$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{8!}{2^3} = 5040,$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{7!}{2^2} = 1260,$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_t| = \frac{6!}{2^1} = 360,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 5! = 120.$$

Theo nguyên lý bao hàm và loại trừ ta có:

$$\begin{aligned} s &= |A| - \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k < t \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_t| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| \\ &= 113400 - 5 \cdot 22680 + 10 \cdot 5040 - 10 \cdot 1260 + 5 \cdot 360 - 120 = 39480. \end{aligned}$$

Nhận xét. Bài toán trên ta cũng có thể giải bằng cách áp dụng nguyên lý bao hàm loại trừ dưới dạng tổng quát được đưa ra ở Định lý 1.2, khi đó ta sẽ được công thức tính như sau:

$$\begin{aligned} S &= |A| - \sum_{i=r}^n (-1)^{i-r} \cdot C_i^r S_i \\ &= 113400 - C_5^1 \cdot \frac{9!}{2^4} + C_5^2 \cdot \frac{8!}{2^3} - C_5^3 \cdot \frac{7!}{2^2} + C_5^4 \cdot \frac{6!}{2^1} - C_5^5 \cdot \frac{5!}{2^0} = 39480. \end{aligned}$$

Bài toán 7. Cho ba chữ số 1, 2, 3. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số gồm n chữ số ($n \geq 3$) sao cho mỗi số đó, có mặt cả ba chữ số 1, 2, 3.

Lời giải. Gọi X là tập hợp tất cả các số thỏa mãn yêu cầu bài toán, Y là tập các số gồm n chữ số được lập từ ba chữ số đã cho, Y_i là tập hợp các số thuộc Y mà trong số đó không có mặt chữ số i ($i = 1, 2, 3$). Ta cần tìm

$$|X| = |Y| - |Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3|.$$

Theo bài ra, ta có

$$|Y| = 3^n, |Y_i| = 2^n,$$

$$|Y_1 \cap Y_2| = |Y_2 \cap Y_3| = |Y_1 \cap Y_3| = 1,$$

$$|Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3| = 0.$$

Áp dụng nguyên lý bao hàm và loại trừ ta được:

$$\begin{aligned}|Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3| &= |Y_1| + |Y_2| + |Y_3| - |Y_1 \cap Y_2| - |Y_2 \cap Y_3| - |Y_1 \cap Y_3| + |Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3| \\ &= 3 \cdot 2^n - 3.\end{aligned}$$

Từ đây, ta suy ra

$$|X| = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3.$$

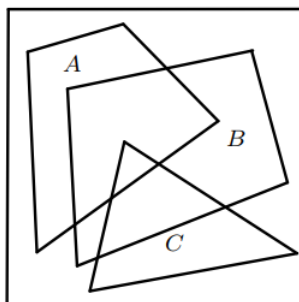
Nhận xét. Bài toán trên là một dạng bài tổng quát với n chữ số nên khi dùng kĩ thuật này ta có thể giải được một số bài toán tương tự sau:

- (1) Cho 4 chữ số 1, 2, 3, 4. Từ các chữ số trên có thể tạo được bao nhiêu số khác nhau có 2015 chữ số ($n \geq 4$) sao cho mỗi số đó có mặt cả bốn chữ số 1, 2, 3, 4.
- (2) Cho k chữ số 1, 2, $\dots$, k . Từ các chữ số trên có thể tạo được bao nhiêu số khác nhau có n chữ số ($n \geq k$) sao cho mỗi số đó có mặt cả k chữ số 1, 2, $\dots$, k .

Ngoài việc được sử dụng trong các bài toán đại số, nguyên lý bao hàm và loại trừ còn ứng dụng linh hoạt trong hình học.

Bài toán 8. Trong hình vuông có diện tích bằng 6, đặt ba đa giác có diện tích bằng 3. Chứng minh rằng luôn tìm được hai đa giác mà diện tích phần chung của chúng không nhỏ hơn 1.

Lời giải.



Gọi 3 đa giác lần lượt là A, B, C . Khi đó, theo nguyên lý bao hàm và loại trừ, ta có

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|. \quad (3)$$

Theo giả thiết, ta được

$$|A| = |B| = |C| = 3. \quad (4)$$

Ta thấy rằng A, B, C nằm trong hình vuông có diện tích bằng 6 nên

$$|A \cup B \cup C| \leq 6.$$

Do đó từ (3) và (4) ta có bất đẳng thức sau

$$9 - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \leq 6,$$

hay

$$|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| \geq 3 + |A \cap B \cap C|. \quad (5)$$

Do $|A \cap B \cap C| \geq 0$ nên từ (5), ta có:

$$|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| \geq 3. \quad (6)$$

Từ (6), theo nguyên lý Dirichlet ¹ tồn tại ít nhất một trong 3 số

$$|A \cap B|, |B \cap C|, |A \cap C|$$

lớn hơn hoặc bằng 1. Vậy ta luôn tìm được hai đa giác mà diện tích phần chung của chúng không nhỏ hơn 1.

3. KẾT LUẬN

Nguyên lý bao hàm và loại trừ được sử dụng nhiều trong các bài toán đếm kinh điển bởi sự linh hoạt của nó. Các bài toán được đưa ra trong bài báo cho thấy các phương pháp đếm dùng tổ hợp, chỉnh hợp hay hoán vị sẽ phát huy hiệu quả nếu có sự kết hợp của nguyên lý này. Bạn đọc cũng có thể tìm hiểu thêm một số ứng dụng của Nguyên lý bao hàm và loại trừ trong bài toán Bỏ thư, bài toán xếp khách của Lucas hay một số bài toán khác. Để kết thúc bài viết này, tác giả xin giới thiệu một số bài toán để bạn đọc thử sức.

Bài toán 9. Có 15 quả cầu đôi một khác nhau, trong đó có 4 quả màu vàng, 5 quả màu xanh, 6 quả màu đỏ. Có bao nhiêu cách chọn ra 10 quả sao cho trong các quả cầu còn lại có đủ ba màu.

Bài toán 10. Trong một đội tuyển học sinh giỏi của một trường THPT có 27 học sinh. Khối 10 có 10 học sinh, khối 11 có 9 học sinh, khối 12 có 8 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 11 học sinh để lập thành một nhóm tham dự trường hè sao cho mỗi khối có ít nhất một học sinh.

Bài toán 11. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 hoặc là bắt đầu bởi 00 hoặc là kết thúc bởi 11?

Bài toán 12. Cho hai tập X, Y với $|X| = n, |Y| = k, n \geq k$. Hãy đếm số toàn ánh từ X vào Y .

Bài toán 13 (Olympic Toán Quốc tế, 1991). Cho $S = \{1, 2, \dots, 280\}$. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất n sao cho mọi tập hợp con n phần tử của S đều chứa 5 số tự nhiên nguyên tố cùng nhau từng đôi một.

¹Bạn đọc có thể tham khảo trong tài liệu [6] về nguyên lý Dirichlet.

Bài toán 14 (VMO, Bảng A, 1995). Cho số nguyên $n \geq 2$ và một đa giác đều $2n$ đỉnh. Người ta tô tất cả các đỉnh của đa giác đều đó bởi n màu sao cho: Mỗi đỉnh được tô bởi một màu và mỗi màu được dùng để tô cho đúng hai đỉnh không kề nhau. Hai cách tô màu, thỏa mãn các điều kiện trên được gọi là tương đương nếu cách tô màu này có thể nhận được từ cách tô màu kia nhờ một phép quay quanh tâm của đa giác đã cho. Hỏi có tất cả có bao nhiêu cách tô màu đôi một không tương đương?

Bài toán 15 (VMO, 2012). Cho một nhóm gồm 5 cô gái, kí hiệu là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 , và 12 chàng trai. Có 17 chiếc ghế được xếp thành một hàng ngang. Người ta xếp nhóm người đã cho ngồi vào các chiếc ghế đó sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

- i) Mỗi người ngồi đúng 1 ghế.
- ii) Các cô gái xếp theo đúng thứ tự 1, 2, 3, 4, 5.
- iii) Giữa G_1, G_2 có ít nhất 3 chàng trai.
- iv) Giữa G_4, G_5 có ít nhất 1 chàng trai và nhiều nhất là 4 chàng trai.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp như vậy? (Hai cách xếp được coi là khác nhau nếu tồn tại một chiếc ghế mà người ngồi ở chiếc ghế đó trong hai cách xếp là khác nhau).

Lời cảm ơn

Tác giả chân thành cảm ơn ThS. Phạm Thị Hương, người đã trực tiếp và tận tình hướng dẫn tác giả trong quá trình viết bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] N. Đ. Nghĩa, N. T. Thành *Toán rời rạc*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2009.
- [2] B. T. Ngọc (Biên soạn), *Bộ đề Toán rời rạc*, Nhà xuất bản Đại học Quảng Ngãi, 10-2011.
- [3] Đ. V. Nhỏ, *Kỹ thuật đếm cao cấp - Toán rời rạc*, 1-2009,
<https://dovannho.violet.vn/present/ky-thuat-dem-cao-cap-497702.html>.
- [4] Đ. Quỳnh (Chủ biên), D. M. Cường, T. N. Dũng, Đ. H. Thắng, *Tài liệu giáo khoa chuyên toán Đại số 10*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2012.
- [5] T. M. Sang, *Các phương pháp đếm nâng cao*, Sáng kiến kinh nghiệm, trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong (Nam Định), tháng 4 năm 2014.
- [6] N. Đ. Tân, *Lý thuyết tổ hợp và đồ thị*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2017.
- [7] N. V. Thông, *Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán Tổ hợp - Rời rạc*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2012.



CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN VÀ ỨNG DỤNG

Nguyễn Thị Giang và Vũ Thị Thanh Hằng - K44B SPT
Khoa Toán, ĐHSP Hà Nội 2

Tóm tắt. Cực trị có điều kiện là một bài toán quan trọng trong chương trình Giải tích hàm nhiều biến với ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực khoa học và thực tiễn. Bài báo đề cập một số vấn đề cơ bản về hàm số nhiều biến, cực trị có điều kiện của hàm số nhiều biến và phương pháp nhân tử Lagrange để xác định cực trị có điều kiện. Mỗi kết quả lý thuyết của bài báo đều được minh họa bởi hệ thống ví dụ áp dụng và các hình ảnh dựng bằng phần mềm Matlab.

1. MỞ ĐẦU

Trong các bài toán ở trường phổ thông, các bài toán cực trị thuộc vào một trong những dạng toán gần với những ứng dụng thực tế nhất. Những yêu cầu về đường đi ngắn nhất, đường đi nhanh nhất, góc nhìn lớn nhất, tổng thời gian chờ đợi ít nhất, tổng chi phí ít nhất, tổng lợi nhuận cao nhất, diện tích lớn nhất, ... là những yêu cầu rất tự nhiên xuất phát từ những bài toán của sản xuất, đời sống và khoa học. Chính vì thế những bài toán cực trị cần có một chỗ đứng xứng đáng trong chương trình toán ở phổ thông, các phương pháp giải bài toán cực trị cũng cần phải được trình bày một cách bài bản.

Trong lý thuyết và ứng dụng, chúng ta thường gặp các bài toán xác định cực trị và tìm giá trị cực trị thỏa mãn các điều kiện ràng buộc cho trước. Với công cụ cấp trung học phổ thông, một trong những phương pháp giải các bài toán nhiều biến số là làm giảm dần số lượng biến để đưa bài toán cực trị nhiều biến về bài toán cực trị hàm một biến hoặc cố gắng làm giảm số ràng buộc của bài toán ít nhất có thể. Tuy nhiên, không phải lúc nào bài toán bài toán tìm cực trị có điều kiện cũng đưa về dạng bài toán tìm cực trị tự do. Với những bài toán ở phổ thông, đặc biệt là các bài toán trong đề thi học sinh giỏi các cấp, cách tiếp cận từ giải tích một biến có thể là đủ để xử lý nhưng chúng ta vẫn luôn đặt câu hỏi về cơ sở cho những phép biến đổi, chọn điểm rơi hay những kĩ thuật kì lạ để giải các bài toán đó.

Phương pháp nhân tử Lagrange được biến đến là một trong những công cụ hữu hiệu để giải quyết các bài toán cực trị có điều kiện. Phương pháp này được đặt theo tên của nhà toán học người Pháp Joseph Louis Lagrange. Các bạn sinh viên ngành Toán sẽ được giới thiệu sơ lược về phương pháp này ở học phần “Giải tích hàm nhiều biến 1” trong năm thứ hai của bậc đại học. Vì vậy, để giúp bạn đọc, đặc biệt các bạn sinh viên năm thứ hai có góc nhìn sâu sắc hơn về lý thuyết và ứng dụng của các bài toán cực trị, bài báo này giới thiệu tới bạn đọc một cách sơ lược về giải tích nhiều biến, cực trị có điều kiện của hàm nhiều biến

và phương pháp nhân tử Lagrange để tìm cực trị có điều kiện của hàm nhiều biến.

Nội dung bài viết gồm 4 phần:

Phần 1. Kiến thức chuẩn bị: Chúng tôi nhắc lại các khái niệm về hàm nhiều biến, đạo hàm và đạo hàm riêng của hàm nhiều biến, đạo hàm cấp hai và đạo hàm riêng cấp hai của hàm nhiều biến;

Phần 2. Cực trị có điều kiện: Chúng tôi trình bày về khái niệm cực trị có điều kiện, phương pháp nhân tử Lagrange và tổng quát lược đồ tìm cực trị có điều kiện theo phương pháp này;

Phần 3. Một số ví dụ: Tiếp theo, để minh họa cho các kết quả lý thuyết, chúng tôi trình bày một hệ thống các ví dụ về các bài toán cực trị giải quyết bằng phương pháp nhân tử Lagrange;

Phần 4. Một số bài tập tham khảo: Với mục tiêu giúp bạn đọc tự kiểm chứng các kết quả đã trình bày, phần cuối của bài báo trình bày một số các bài tập kiến nghị liên quan đến cực trị có điều kiện.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

2.1. Hàm nhiều biến

Định nghĩa 2.1 ([2]). Xét tập hợp

$$A = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Khi đó, ánh xạ $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ xác định bởi $x \in A \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ được gọi là một hàm nhiều biến giá trị vectơ xác định trên A và nhận giá trị trong $\mathbb{R}^m$. Các tập hợp $A \subset \mathbb{R}^n$ và $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ lần lượt là miền xác định và miền giá trị của ánh xạ f .

Đặc biệt, với mỗi $j = \overline{1, m}$, một hàm số nhiều biến là ánh xạ

$$f_j : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_j(x).$$

Ví dụ 2.1. Xét ánh xạ $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

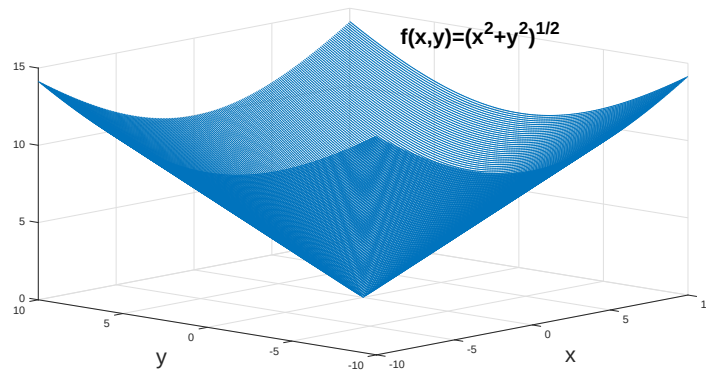
$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ánh xạ $f(x, y)$ cho như trên là một hàm số hai biến trên $\mathbb{R}^2$. Hơn nữa, đồ thị hàm số $f(x, y)$ xác định một mặt nón (xem Hình 1).

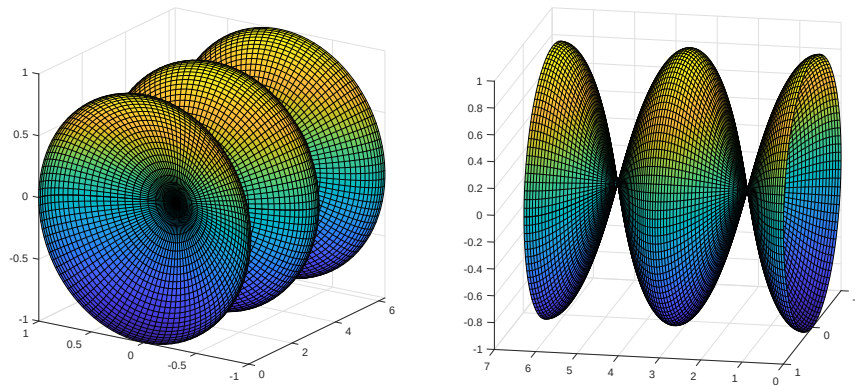
Ví dụ 2.2. Xét ánh xạ $f : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cho bởi

$$(u, v) \mapsto f(u, v) = \begin{bmatrix} u & \cos u \cos v & \cos u \sin v \end{bmatrix}.$$

Ánh xạ $f(u, v)$ cho như trên xác định một hàm hai biến giá trị vectơ trong $\mathbb{R}^3$. Biểu diễn hình học của hàm vectơ $f(u, v)$ chính là mặt cong tạo thành khi quay đường cong $y = \cos u$ quanh trục Ox (xem Hình 2).



Hình 1. Biểu diễn hình học của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Hình 2. Mặt cong tạo bởi khi quay đường cong $y = \cos u$ quanh trục Ox .

Ví dụ 2.3. Xét ánh xạ $\vec{r} : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cho bởi

$$(\theta, \phi) \mapsto \vec{r}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} (2 \cos \theta + 3) \cos \phi & (2 \cos \theta + 3) \sin \phi & 2 \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Ánh xạ $\vec{r}(\theta, \phi)$ cho như trên xác định một hàm hai biến giá trị vectơ trong $\mathbb{R}^3$.

Biểu diễn hình học của hàm vectơ $\vec{r}(\theta, \phi)$ chính là một mặt xuyên tạo thành khi quay đường tròn $(x - 3)^2 + z^2 = 4$ quanh trục Oz (xem Hình 3).

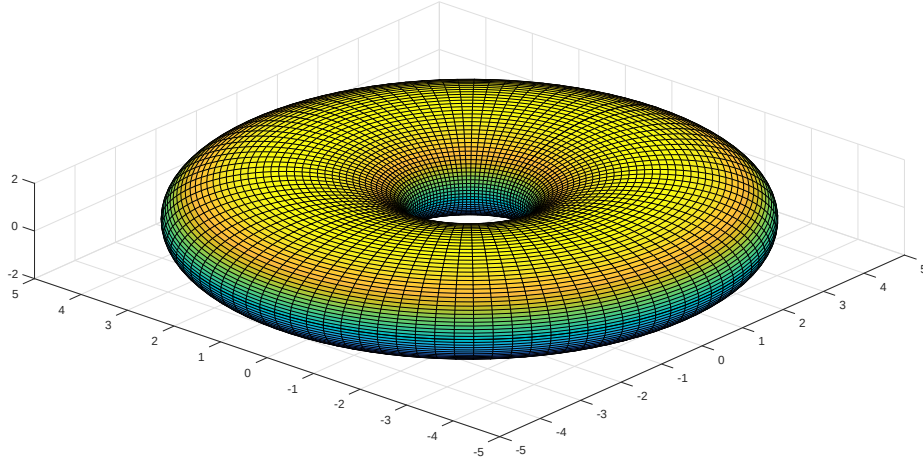
2.2. Đạo hàm và đạo hàm riêng của hàm nhiều biến

Định nghĩa 2.2 ([2]). Cho tập $A \subset \mathbb{R}^n$ và điểm $x_0 \in A$. Ánh xạ $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ được gọi là khả vi tại điểm x_0 nếu và chỉ nếu tồn tại ánh xạ tuyến tính $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sao cho với mọi $h \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $x_0 + h \in A$, ta có

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Df(x_0)h + r(h),$$

trong đó $r(h)$ thỏa mãn $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$ với $\|\cdot\|$ là chuẩn trong $\mathbb{R}^n$ (xem [2]). Ánh xạ

tuyến tính $Df(x_0)$ cho bởi trên được gọi là đạo hàm của ánh xạ f tại điểm x_0 . Ánh xạ $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ được gọi là khả vi trên A nếu và chỉ nếu f khả vi tại mọi điểm $x_0 \in A$.



Hình 3. Mặt xuyến $\vec{r}(\theta, \phi)$ tạo thành khi quay đường tròn $(x - 3)^2 + z^2 = 4$ quanh trục Oz .

Định nghĩa 2.3 ([2]). Cho tập hợp $A \subset \mathbb{R}^n$ và ánh xạ $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử rằng $\{e_i\}_{i=1}^n$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$. Khi đó, nếu giới hạn

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$

tồn tại thì giới hạn này được gọi là đạo hàm riêng của hàm f theo biến x_i tại điểm $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Kí hiệu đạo hàm riêng của hàm f theo biến x_i tại điểm x_0 bởi $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$ hoặc $D_i f(x_0)$.

Nhận xét 2.1. Khi tính đạo hàm riêng của hàm $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ theo một biến x_i thì chúng ta xem $n - 1$ biến còn lại là hằng số và áp dụng quy tắc tính đạo hàm của hàm một biến số.

Định nghĩa 2.4 ([4]). Cho $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ là một hàm nhiều biến giá trị vectơ. Khi đó, gradient của hàm vectơ f là ma trận Jacobi $J \in \mathbb{R}^{n \times m}$ cho bởi

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Đặc biệt, nếu $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số nhiều biến thì

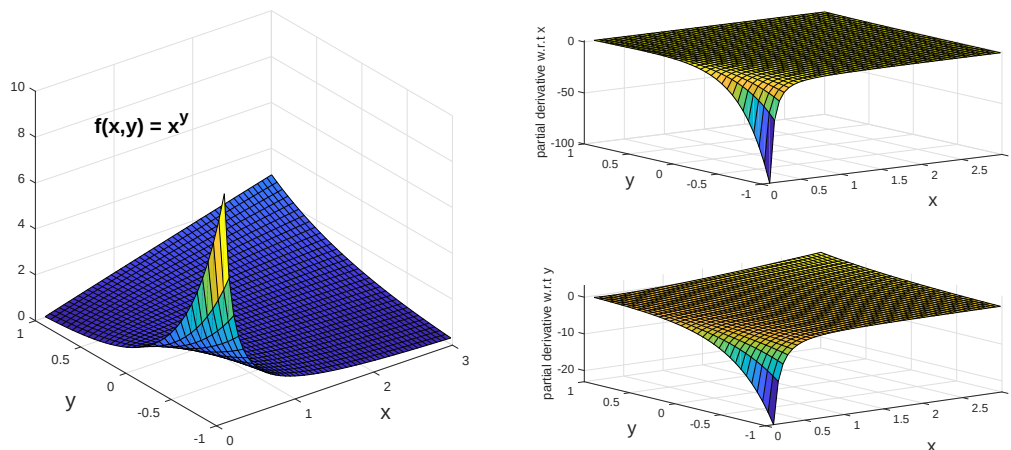
$$\nabla f = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right]$$

được gọi là vectơ gradient của hàm số f .

Ví dụ 2.4. Xét hàm số $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cho bởi $f(x, y) = x^y$. Khi đó, ta có các đạo hàm riêng của hàm số $f(x, y)$ cho bởi

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= yx^{y-1} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= x^y \ln x.\end{aligned}$$

Biểu diễn hình học của $f(x, y)$ và các đạo hàm riêng $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ được cho ở Hình 4.



Hình 4. Biểu diễn hình học của hàm số $f(x, y) = x^y$ và các đạo hàm riêng.

Ví dụ 2.5. Xét hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^6 + y^3} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Tính các đạo hàm riêng của hàm số $f(x, y)$ theo các biến x, y .

Với mọi $(x, y) \neq (0, 0)$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{y^4 - 5x^6 y}{(x^6 + y^3)^2}, \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{x^7 - 2xy^3}{(x^6 + y^3)^2}.\end{aligned}$$

Tại điểm $(x, y) = (0, 0)$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \\ \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.\end{aligned}$$

Do đó, ta thu được

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \begin{cases} \frac{y^4 - 5x^6 y}{(x^6 + y^3)^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0), \end{cases} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \begin{cases} \frac{x^7 - 2xy^3}{(x^6 + y^3)^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0). \end{cases}\end{aligned}$$

Chú ý rằng hàm số $f(x, y)$ có cả hai đạo hàm riêng theo hai biến x, y tại $(0, 0)$ nhưng hàm số này không liên tục tại $(0, 0)$.

Thật vậy, xét dãy

$$\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 1} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \geq 1}.$$

Ta có $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$ nhưng

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{n^4}{n^3 + 1} \rightarrow \infty \quad \text{khi } n \rightarrow \infty.$$

Như vậy hàm số $f(x, y)$ có đạo hàm riêng theo mọi biến tại điểm $(0, 0)$ nhưng $f(x, y)$ không liên tục tại điểm $(0, 0)$ và do đó hàm số này không khả vi tại điểm $(0, 0)$ vì điều kiện cần để một hàm số khả vi tại điểm $(0, 0)$ là nó phải liên tục tại điểm này.

Nhận xét 2.2. Từ ví dụ trên, chúng ta có thể thấy rằng sự tồn tại của các đạo hàm riêng theo mọi biến tại điểm $x_0 \in \mathbb{R}^n$ của ánh xạ $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ không đảm bảo cho sự khả vi của ánh xạ đó tại điểm x_0 . Tuy nhiên, chúng ta lại có

Định lý 2.1 ([2]). Nếu ánh xạ $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi tại điểm $x_0 \in A$ thì f có đạo hàm riêng theo mọi biến tại điểm này và

$$Df(x_0)h = \sum_{i=1}^n D_i f(x_0)h_i$$

với mọi $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 2.5 ([2]). Cho ánh xạ $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ và $x_0 \in A$. Giả sử rằng các đạo hàm riêng của f tồn tại với mọi $x \in A$.

Nếu hàm số $D_i f : A \rightarrow \mathbb{R}$ cho bởi $x \mapsto D_i f(x)$ có đạo hàm theo biến thứ j tại x_0 , tức là tồn tại $D_j(D_i f)(x_0)$, thì đạo hàm này được gọi là đạo hàm riêng cấp hai của f tại x_0 theo biến x_i và x_j và được kí hiệu là $D_{ij}f(x_0)$ hay $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$.

$$\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right) (x_0).$$

Định nghĩa 2.6 ([2]). Cho ánh xạ $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ và $x_0 \in A$. Giả sử rằng $f \in C^2(A, \mathbb{R})$.

Khi đó, ánh xạ song tuyến tính đối xứng $D^2f(x_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi ma trận

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

được gọi là đạo hàm cấp hai của ánh xạ f tại $x_0 \in \mathbb{R}^n$ và kí hiệu bởi $D^2f(x_0)$ hoặc $f''(x_0)$.

Vì phân cấp hai của ánh xạ f tại điểm $x_0 \in \mathbb{R}^n$ được cho bởi

$$d^2f(x_0) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Ví dụ 2.6. Xét hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Các đạo hàm riêng của $f(x, y)$ theo các biến x, y lần lượt cho bởi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \begin{cases} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0), \end{cases} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \begin{cases} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó, ta thu được $\frac{\partial f(x, 0)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f(0, y)}{\partial x} = -y$ và do đó

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(x, 0)}{\partial x} - \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}}{x} = 0, \\ \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(0, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}}{y} = -1. \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có $\frac{\partial f(x, 0)}{\partial y} = x$, $\frac{\partial f(0, y)}{\partial y} = 0$ và

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(x, 0)}{\partial y} - \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}}{x} = 1, \\ \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(0, y)}{\partial y} - \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}}{y} = 0. \end{aligned}$$

3. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN

Để thuận tiện cho trình bày, trong mục này chúng ta nghiên cứu các kết quả đối với hàm số hai biến. Kết quả cho trường hợp tổng quát được thảo luận trong Nhận xét 3.4.

3.1. Phương pháp nhân tử Lagrange

Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}^2$ và ánh xạ $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $(x, y) \mapsto f(x, y)$. Trong bài báo này, chúng ta xét bài toán tìm cực trị của hàm số $f(x, y)$ biết rằng các biến x, y thỏa mãn phương trình (ràng buộc) sau:

$$\Phi(x, y) = 0. \quad (1)$$

Điều kiện (1) được gọi là điều kiện ràng buộc của bài toán.

Định nghĩa 3.1 ([3]). Điểm $(x_0, y_0) \in U$ được gọi là *điểm cực đại ràng buộc* (tương ứng *điểm cực tiểu ràng buộc*) của hàm số $f(x, y)$ nếu hai điều kiện sau thỏa mãn:

- (i) Điểm (x_0, y_0) thỏa mãn điều kiện ràng buộc (1), tức là $\Phi(x_0, y_0) = 0$.
- (ii) Tồn tại lân cận $V \subset U$ của (x_0, y_0) sao cho với mọi $(x, y) \in V$ thỏa mãn điều kiện ràng buộc $\Phi(x, y) = 0$, ta có

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (\text{tương ứng } f(x, y) \geq f(x_0, y_0)).$$

Nhận xét 3.1. Giả sử rằng điểm (x_0, y_0) là điểm cực trị ràng buộc của hàm $f(x, y)$ với điều kiện ràng buộc $\Phi(x, y) = 0$. Nếu trong một lân cận của điểm (x_0, y_0) từ hệ thức $\Phi(x, y) = 0$ ta có thể xác định được hàm số $y = y(x)$ thì hiển nhiên $f(x_0, y(x_0))$ là cực trị địa phương của hàm một biến $g(x) = f(x, y(x))$. Như vậy, trong trường hợp này, bài toán tìm cực trị có điều kiện của hàm hai biến được đưa về bài toán tìm cực trị tự do của hàm một biến.

Ví dụ 3.1. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x, y) = xy$$

với điều kiện $x + y - 1 = 0$.

Từ điều kiện ràng buộc $x + y - 1 = 0$, ta suy ra $y = 1 - x$. Bằng cách thế $y = 1 - x$ vào biểu thức của $f(x, y)$, ta nhận được

$$g(x) = f(x, 1 - x) = x(1 - x).$$

Khi đó, bài toán tìm cực trị có điều kiện của hàm $f(x, y)$ được chuyển thành bài toán tìm cực trị tự do của hàm $g(x) = x - x^2$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó, chúng ta dễ dàng khảo sát được hàm số $g(x)$ đạt cực đại địa phương tại điểm $x_0 = \frac{1}{2}$ và do đó, hàm $f(x, y)$ đạt cực đại ràng buộc tại điểm $M_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ với giá trị cực đại $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Tuy nhiên, nói chung từ ràng buộc $\Phi(x, y) = 0$ không phải lúc nào chúng ta cũng giải được $y = y(x)$, tức là không phải lúc nào bài toán tìm cực trị có điều kiện cũng có thể đưa về bài toán tìm cực trị tự do. Trong trường hợp đó, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange để khảo sát cực trị của hàm $f(x, y)$. Phương pháp này được mô tả như sau:

Định lý 3.1 ([3]). Giả sử rằng hàm số $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nhận điểm (x_0, y_0) là điểm cực trị thỏa mãn điều kiện ràng buộc $\Phi(x, y) = 0$. Hơn nữa, giả sử các hàm $f(x, y)$ và $\Phi(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận của điểm (x_0, y_0) và $\frac{\partial \Phi(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

Khi đó, tồn tại số thực λ sao cho bộ ba (x_0, y_0, λ) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = 0 \\ \Phi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Chứng minh. Từ giả thiết $\frac{\partial \Phi(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$ và định lý hàm ẩn, ta suy ra tồn tại $\delta > 0$ và ánh xạ

$$\Psi : V_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$$

thỏa mãn $\Psi(x_0) = y_0$ sao cho $\Phi(x_0, \Psi(x_0)) = 0$. Hơn nữa, ta có $\Psi(x)$ khả vi tại điểm x_0 và

$$\Psi'(x_0) = -\frac{\partial \Phi(x_0, y_0)}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi(x_0, y_0)}{\partial y} \right]^{-1}.$$

Tiếp theo, xét hàm số

$$\begin{aligned} g : V_\delta(x_0) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = f(x, \Psi(x)). \end{aligned}$$

Theo công thức đạo hàm của hàm hợp ta có

$$g'(x_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial \Phi(x_0, y_0)}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi(x_0, y_0)}{\partial y} \right]^{-1}.$$

Mặt khác, do hàm số $g(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 nên $g'(x_0) = 0$ hay tương đương với

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial \Phi(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial \Phi(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Do đó, ta thu được điều phải chứng minh với

$$\lambda = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \left[\frac{\partial \Phi(x_0, y_0)}{\partial y} \right]^{-1}.$$

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 3.2. Hằng số λ trong Định lí 3.1 được gọi là nhân tử Lagrange.

Nếu ta đặt

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \Phi(x, y)$$

thì hàm $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ được gọi là hàm Lagrange. Khi đó hệ phương trình (2) có thể được viết lại ở dạng

$$\nabla \mathcal{L} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$$

Đây chính là điều kiện cần của cực trị ràng buộc.

Tiếp theo, chúng ta sẽ tìm một điều kiện đủ để xét xem trong các nghiệm (x_0, y_0, λ_0) của hệ phương trình (2) khi nào điểm (x_0, y_0) là điểm cực trị ràng buộc của hàm $f(x, y)$. Với mọi (x, y) thỏa mãn $\Phi(x, y) = 0$, ta có

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda_0) - \mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0).$$

Vì vậy nếu điểm (x_0, y_0) là điểm cực trị của hàm $\mathcal{L}(x, y, \lambda_0)$ thì (x_0, y_0) cũng là cực trị ràng buộc của hàm $f(x, y)$ với điều kiện ràng buộc $\Phi(x, y) = 0$. Do đó, bài toán tìm cực trị ràng buộc của hàm $f(x, y)$ tương đương với bài toán tìm cực trị tự do của hàm Lagrange $\mathcal{L}(x, y, \lambda_0)$. Chú ý rằng λ_0 là hằng số nên thực chất $\mathcal{L}(x, y, \lambda_0)$ chỉ là hàm số hai biến. Phương pháp vừa trình bày ở trên gọi là phương pháp nhân tử Lagrange.

Nhận xét 3.3. Định lí 3.1 cùng với phương pháp nhân tử Lagrange trình bày trên đây giúp ta thu hẹp việc tìm cực trị có điều kiện của hàm $f(x, y)$ với ràng buộc $\Phi(x, y) = 0$ tại những điểm thỏa mãn hệ (2) hoặc tại những điểm mà một trong các điều kiện của Định lí 3.1 không được thỏa mãn (gọi chung là *các điểm tới hạn*). Việc tiếp theo chúng ta phải khảo sát những điểm đó có thực sự là điểm cực trị hay không?

Từ điều kiện ràng buộc $\Phi(x, y) = 0$, lấy vi phân hai vế, ta nhận được

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} dy = 0.$$

Áp dụng công thức khai triển Taylor đối với hàm $\mathcal{L}(x, y, \lambda_0)$ trong lân cận của điểm (x_0, y_0) với lưu ý rằng (x_0, y_0, λ_0) thỏa mãn hệ (2), ta thu được

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \mathcal{L}(x, y, \lambda_0) - \mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} dx dy \\ &\quad + \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial y^2} dy^2 + E(x - x_0, y - y_0), \end{aligned}$$

trong đó $E(x - x_0, y - y_0)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.
Do đó, khi (x, y) đủ gần (x_0, y_0) tức thì dấu của $[f(x, y) - f(x_0, y_0)]$ chính là dấu của

$$d^2\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial^2\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial y^2}dy^2.$$

Mặt khác, do dx và dy liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y}dy = 0$$

nên ta có thể rút dy theo dx rồi thế vào biểu thức $d^2\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0)$. Khi đó, ta có

$$d^2\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0) = G(x_0, y_0, \lambda_0)dx^2.$$

Từ đó, ta thấy rằng:

- (i) Nếu $G(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ thì điểm (x_0, y_0) là điểm cực tiểu ràng buộc của $f(x, y)$;
- (ii) Nếu $G(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ thì điểm (x_0, y_0) là điểm cực đại ràng buộc của $f(x, y)$;

3.2. Thuật toán xác định cực trị có điều kiện

Sau đây, để thuận tiện cho bạn đọc, chúng tôi giới thiệu lược đồ tìm cực trị có điều kiện của hàm nhiều biến $f(x, y)$ với điều kiện ràng buộc $\Phi(x, y) = 0$.

Bước 1: Dựng hàm Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\Phi(x, y).$$

Bước 2: Giải hệ phương trình điểm dừng

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$$

Bước 3: Tính

$$d^2\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial^2\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial y^2}dy^2,$$

trong đó quan hệ giữa dx và dy được xác định thông qua hệ thức $d\Phi(x, y) = 0$.

Bước 4: Xác định dấu của $d^2\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0)$ và kết luận.

Nhận xét 3.4. Các kết quả thu được ở trên cho hàm số hai biến có thể mở rộng cho các hàm số với nhiều biến hơn.

Bài toán: Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ và ánh xạ $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ thuộc lớp $C^2(U)$. Ta xét bài toán tìm cực trị của hàm nhiều biến $f(x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$ biết rằng các biến $x_1, x_2, \dots, x_{n+m}$ thỏa mãn m điều kiện ràng buộc:

$$\Phi_i(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = 0 \quad i = \overline{1, m},$$

trong đó $\Phi_i : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ là ánh xạ thuộc lớp $C^1(U)$. Dưới đây, chúng tôi sẽ giới thiệu lược đồ tìm cực trị có điều kiện của hàm nhiều biến $f(x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$ với m điều kiện ràng buộc:

Bước 1: Lập hàm Lagrange

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_{n+m}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_{n+m}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \Phi_i(x_1, \dots, x_{n+m}).$$

Bước 2: Tìm các điểm cực trị ràng buộc của hàm f từ các điểm dừng của hệ

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n+m}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = 0 & (j = \overline{1, n+m}), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i}(x_1, \dots, x_{n+m}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = 0 & (i = \overline{1, m}). \end{cases}$$

Bước 3: Khảo sát dấu của dạng toàn phương $d^2 \mathcal{L}(x_1, \dots, x_{n+m}, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ và kết luận.

4. MỘT SỐ VÍ DỤ

Trong mục này, chúng tôi đưa ra một hệ thống các ví dụ minh họa cho các kết quả lý thuyết được tham khảo từ các tài liệu [1, 2, 3, 5].

Ví dụ 4.1. Tìm cực trị của các hàm số sau trên đường tròn đơn vị

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

a. $f(x, y) = x + y.$

b. $f(x, y) = xy.$

Lời giải.

a. Lập hàm Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (x + y) + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Chúng ta tìm các điểm dừng của $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ từ hệ

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu, ta rút được $x = y = -\frac{1}{2\lambda}$. Sau đó, thay giá trị x, y vừa tìm được vào phương trình $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ta thu được

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Từ đó, ta tìm được các điểm dừng

$$a_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ và } a_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Các đạo hàm cấp hai của hàm $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ lần lượt là

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x^2} &= 2\lambda \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y^2} &= 2\lambda, \end{aligned}$$

và vi phân cấp hai của hàm $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ cho bởi

$$d^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

Thêm vào đó, từ điều kiện ràng buộc $x^2 + y^2 - 1 = 0$, ta thu được

$$dy = -\frac{x}{y}dx$$

và do đó, ta nhận được

$$d^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2\lambda \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right) dx^2.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} d^2 \mathcal{L}(a_1) &= -2\sqrt{2}dx^2 < 0 \\ d^2 \mathcal{L}(a_2) &= 2\sqrt{2}dx^2 > 0. \end{aligned}$$

Vậy hàm số $f(x, y)$ đạt cực đại có điều kiện tại điểm $M_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ và đạt cực tiểu có điều kiện tại điểm $M_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ với giá trị cực đại và giá trị cực tiểu tương ứng là

$$f_{\max} = \sqrt{2} \quad f_{\min} = -\sqrt{2}.$$

b. Theo phương pháp nhân tử Lagrange, ta lập hàm Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

và tìm các điểm dừng của $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ từ hệ

$$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Từ đó, ta tìm được các điểm dừng của $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ là

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) & a_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) \\ a_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) & a_4 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Bằng lập luận tương tự phần a, ta tìm được

$$d^2\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2 \left(\lambda + \frac{\lambda x^2}{y^2} - \frac{x}{y} \right) dx^2.$$

Khi đó, ta xét bảng sau:

	a_1	a_2	a_3	a_4
Hệ số 2 $\left(\lambda + \frac{\lambda x^2}{y^2} - \frac{x}{y}\right)$	-4	-4	4	4
Kết luận	Cực đại	Cực đại	Cực tiểu	Cực tiểu

Vì vậy, chúng ta có kết luận như sau:

- Hàm $f(x, y) = xy$ đạt cực đại tại các điểm $M_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $M_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
- Hàm $f(x, y) = xy$ đạt cực tiểu tại các điểm $M_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $M_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ví dụ 4.2. Giả sử một nhà máy sản xuất một số loại vật dụng cần thép làm nguyên liệu thô. Chi phí chủ yếu của nhà máy là chi phí thuê nhân công và chi phí cho mua nguyên liệu thép. Cụ thể:

- Chi phí mỗi giờ làm việc của công nhân là 20 \$.
- Chi phí cho mỗi tấn thép là 170 \$.

Giả sử doanh thu của bạn được tính theo công thức như sau:

$$V(x, y) = 200x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}},$$

trong đó x là số giờ lao động và y là số tấn thép. Nếu ngân sách của nhà máy là 20000 \$ thì doanh thu tối đa của nhà máy là bao nhiêu?

Lời giải. Ta biết rằng tổng chi phí sản xuất tính theo chi phí thuê nhân công và mua nguyên liệu là $A = 20x + 170y$ mà ngân sách của cửa nhà máy là $A = 20000$, tức là

$$20x + 170y = 20000.$$

Đặt $\Phi(x, y) = 20x + 170y - 20000$. Khi đó, bài toán tối ưu doanh thu của nhà máy tương đương với bài toán cực trị ràng buộc sau:

$$V(x, y) = 200x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} \longrightarrow \max,$$

với điều kiện ràng buộc $\Phi(x, y) = 20x + 170y - 20000 = 0$.

Tiếp theo, chúng ta lập hàm Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = V(x, y) - \lambda\Phi(x, y) = 200x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} - \lambda(20x + 170y - 20000).$$

Sau đó, xét hệ phương trình điểm dừng của hàm Lagrange

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x} = \frac{2}{3}200x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - 20\lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y} = \frac{1}{3}200x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}} - 170\lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = -20x - 170y + 20000 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta thu được

$$\begin{cases} x^* = \frac{2000}{3} \approx 666,67 \\ y^* = \frac{2000}{51} \approx 39,21 \\ \lambda = \sqrt[3]{\frac{8000}{459}} \approx 2,59. \end{cases}$$

Điều này có nghĩa là nhà máy nên chi trả khoảng 667 giờ lao động và mua 39 tấn thép sẽ mang lại doanh thu tối đa.

Ví dụ 4.3. Tìm các kích thước của một hình hộp chữ nhật sao cho thể tích của khối này là lớn nhất, biết rằng tổng diện tích các mặt của khối hộp là 64 cm^2 .

Lời giải. Đặt chiều dài của hộp là x , chiều rộng của hộp là y và chiều cao của hộp là z . Chúng ta cũng lưu ý rằng vì chúng ta đang xử lý kích thước của hộp nên sẽ an toàn khi giả sử rằng x, y và z đều là số dương. Khi đó, thể tích của hình hộp được cho bởi

$$f(x, y, z) = xyz.$$

Mặt khác, ta đã biết rằng tổng diện tích các mặt của hình hộp là 64 cm^2 và do đó, ta nhận được đẳng thức

$$2xy + 2yz + 2zx = 64 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 32.$$

Từ đó bài toán đã cho trở thành bài toán tìm cực trị ràng buộc sau:

$$f(x, y, z) = xyz \longrightarrow \max$$

với điều kiện ràng buộc $\Phi(x, y, z) = xy + yz + zx - 32 = 0$. Sau đây, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange để giải quyết bài toán.

Xét hàm Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(xy + yz + zx - 32).$$

Hệ phương trình điểm dừng tương ứng với bài toán cho bởi

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, z, \lambda)}{\partial x} = yz - \lambda(y + z) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, z, \lambda)}{\partial y} = xz - \lambda(x + z) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, z, \lambda)}{\partial z} = xy - \lambda(x + y) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, z, \lambda)}{\partial \lambda} = xy + yz + zx - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = \lambda x(y + z) \\ xyz = \lambda y(x + z) \\ xyz = \lambda z(x + y) \\ xy + yz + zx = 32. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta nhận được

$$x = y = z = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

(vì x, y, z dương) hay tương đương với khối hộp khi đó là hình lập phương. Từ đó, thể tích cực đại nhận được là

$$V = f\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}, \frac{4\sqrt{6}}{3}, \frac{4\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{128\sqrt{6}}{9}.$$

Ví dụ 4.4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

với điều kiện ràng buộc

$$2x + y + 2z = 9 \text{ và } 5x + 5y + 7z = 29.$$

Lời giải. Ta đặt

$$g(x) = 2x + y + 2z - 9 \quad \text{và} \quad h(x) = 5x + 5y + 7z - 29.$$

Ta lập hàm Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(2x + y + 2z - 9) - \mu(5x + 5y + 7z - 29).$$

Ta tính đạo hàm riêng cấp 1 theo từng biến và lập hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu)}{\partial x} = 2x - 2\lambda - 5\mu = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu)}{\partial y} = 2y - \lambda - 5\mu = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu)}{\partial z} = 2z - 2\lambda - 7\mu = 0 \\ 2x + y + 2z = 9 \\ 5x + 5y + 7z = 29. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta nhận được

$$(x, y, z, \lambda, \mu) = (2, 1, 2, 2, 0).$$

Từ đó, ta suy ra tọa độ điểm dừng là $M_0(2, 1, 2)$. Đạo hàm riêng cấp hai của $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu)$ tại M_0 lần lượt là:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu)}{\partial x^2} &= 2; & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu)}{\partial y^2} &= 2; & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu)}{\partial z^2} &= 2, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu)}{\partial x \partial y} &= 0; & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu)}{\partial y \partial z} &= 0; & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu)}{\partial x \partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Vì phân cấp hai của hàm Lagrange tại điểm M_0 là

$$\begin{aligned} d^2 \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) \\ = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu)}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu)}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu)}{\partial z^2} dz^2 \\ + 2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu)}{\partial y \partial z} dy dz + \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu)}{\partial x \partial z} dx dz \right). \end{aligned}$$

Thay giá trị các đạo hàm riêng cấp hai vào biểu thức này, ta nhận được:

$$\begin{aligned} d^2 \mathcal{L}(x, y, z, \lambda) \\ = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 \\ = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2). \end{aligned}$$

Từ đó, ta suy ra M_0 là điểm cực tiểu của hàm số

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

với $f_{\min} = 9$.

Sau đây, chúng ta sẽ quan tâm tới một số bài toán cực trị hình học được giải quyết nhờ vào phương pháp nhân tử Lagrange.

Ví dụ 4.5 (Chuyên Hưng Yên - lần 2, 2019). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và cạnh SA vuông góc với đáy. Độ dài $SA = y$. Trên cạnh AD , lấy điểm M sao cho độ dài $AM = x$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCM$ biết rằng

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

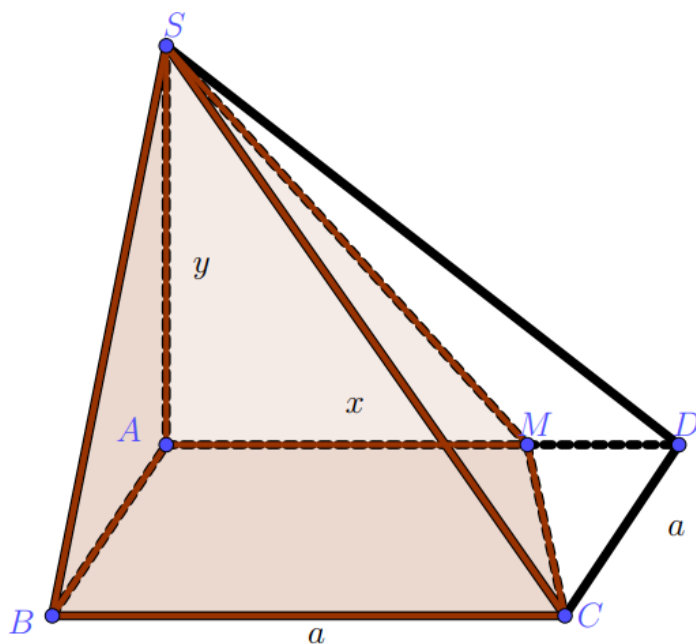
Lời giải. Thể tích hình chóp $S.ABCM$ được cho bởi

$$V_{S.ABCM} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCM},$$

trong đó theo giả thiết ta có $SA = y$.

Do $MD = AD - AM = a - x$ nên diện tích tứ giác $ABCM$ được tính bởi

$$\begin{aligned} S_{ABCM} &= S_{ABCD} - S_{CDM} \\ &= a^2 - \frac{1}{2}a(a - x) = \frac{1}{2}a(a + x). \end{aligned}$$



Do đó, thể tích khối chóp $S.ABCM$ được tính như sau:

$$V_{S.ABCM} = \frac{1}{6}y(a^2 + ax).$$

và chúng ta thu được bài toán tối ưu sau:

$$V_{S.ABCM} = \frac{1}{6}ay(a + x) \longrightarrow \max, \quad (3)$$

với điều kiện ràng buộc

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0. \quad (4)$$

Nhận xét 4.1. Đến đây, chúng ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy một cách thích hợp để giải quyết bài toán tối ưu (3) - (4). Tuy nhiên, việc cân bằng hệ số và chọn điểm rơi thích hợp là tương đối phức tạp. Dưới đây, chúng tôi đề xuất áp dụng phương pháp nhân tử Lagrange như một trong những công cụ để xác định được điểm rơi của bất phương trình và giải quyết bài toán một cách đơn giản hơn.

Xét hàm Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = y(a^2 + ax) - \lambda(x^2 + y^2 - a^2).$$

Hệ phương trình điểm dừng của hàm Lagrange trên cho bởi

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x} = ay - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y} = a^2 + ax - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - a^2 = 0. \end{cases}$$

Từ hệ phương trình trên, ta giải ra được

$$x = \frac{a}{2} \text{ và } y = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

và do đó, giá trị thể tích lớn nhất của hình chóp $S.ABCM$ là

$$V_{S.ABCM} = \frac{1}{6} \frac{a\sqrt{3}}{2} \left(a^2 + \frac{a^2}{2} \right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Ví dụ 4.6. Tìm điểm P nằm trong tam giác $\triangle ABC$ sao cho tổng các tỉ số độ dài các cạnh trên khoảng cách từ P đến các cạnh của tam giác đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. Giả sử a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh AB, AC, BC của tam giác $\triangle ABC$ và x, y, z lần lượt là khoảng cách từ điểm P đến các cạnh AB, AC, BC . Nối P với các đỉnh của tam giác, ta thu được ba tam giác con có tổng diện tích bằng diện tích của tam giác ban đầu, tức là

$$\frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2} = S.$$

Bài toán xác định vị trí điểm P tương đương với bài toán tìm cực trị ràng buộc của hàm số

$$f(x, y, z) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \rightarrow \min$$

với điều kiện ràng buộc

$$ax + by + cz = 2S.$$

Xét hàm Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \lambda(ax + by + cz - 2S).$$

Điểm dừng của hàm Lagrange $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda)$ được xác định từ hệ phương trình

$$\begin{cases} -\frac{a}{x^2} + \lambda a = 0 \\ -\frac{b}{y^2} + \lambda b = 0 \\ -\frac{c}{z^2} + \lambda c = 0. \end{cases}$$

Từ đó, chúng ta suy ra

$$x = y = z,$$

tức là P cách đều các cạnh của tam giác hay P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $\triangle ABC$.

5. MỘT SỐ BÀI TẬP THAM KHẢO

Bài toán 1. Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị có điều kiện của các hàm số được chỉ ra dưới đây:

- a) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ thỏa mãn $x + y = 2$.
- b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ thỏa mãn $xy = 1$.
- c) $f(x, y) = e^{xy}$ thỏa mãn $x^3 + y^3 = 16$.
- d) $f(x, y) = x^2y$ thỏa mãn $x^2 + 2y^2 = 6$.
- e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ thỏa mãn $x^4 + y^4 + z^4 = 1$.
- f) $f(x, y, z) = xyz$ thỏa mãn $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$.
- g) $f(x, y, z) = x + y + z^2$ thỏa mãn $x + y + z = 1$ và $x^2 + z^2 = 1$.
- h) $f(x, y, z) = yz + xy$ thỏa mãn $xz = 1$ và $y^2 + z^2 = 1$.

Bài toán 2. Một hình ngũ giác được tạo thành bằng cách đặt một tam giác cân trên một hình chữ nhật. Nếu chu vi của hình ngũ giác là 10cm. Tìm kích thước các cạnh của hình ngũ giác biết rằng diện tích của hình ngũ giác là lớn nhất.

Bài toán 3. Chúng ta cần dựng một container có dạng hình hộp chữ nhật với thể tích 480 m^3 . Biết rằng mặt đáy của container tốn 5 \$/m² để xây dựng trong khi trần và các mặt bên tốn 3 \$/m² để xây dựng. Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange, xác định kích thước của container sao cho chi phí xây dựng là ít nhất.

Bài toán 4. Một nhà máy sản xuất 3 loại xe ô tô gồm: xe hơi, xe bán tải và xe tải. Doanh thu của công ty được tính bởi công thức $R(c, t, v)$, trong đó c, t, v lần lượt là số lượng xe hơi, xe bán tải và xe tải nhà máy này sản xuất mỗi năm. Biết rằng lượng nguyên liệu thép S và nhôm A là cố định. Giả sử rằng việc sản xuất mỗi chiếc xe hơi, xe bán tải và xe tải cần tương ứng s_c, s_t, s_v đơn vị thép và a_c, a_t, a_v đơn vị nhôm.

1. Lập các phương trình ràng buộc cho quá trình sản xuất các loại xe.
2. Xác định doanh thu tối đa của nhà máy.

Bài toán 5. Một vật thể có dạng hình hộp chữ nhật nội tiếp trong một khối tứ diện có các đỉnh $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ và gốc $O(0, 0, 0)$. Gọi chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hình hộp lần lượt là x, y và z . Giả sử rằng tổng các kích thước của hình hộp bằng 1. Xác định các kích thước của hình hộp để nó có thể tích lớn nhất.

Bài toán 6. Trên mặt nón

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

tìm tất cả các điểm $M(x, y, z)$ có khoảng cách đến điểm $M_0(4, 2, 0)$ nhỏ nhất.

6. KẾT LUẬN

Qua bài báo này, nhóm tác giả muốn cung cấp cho bạn đọc một số vấn đề cơ bản về cực trị có điều kiện của hàm nhiều biến cũng như phương pháp nhân tử Lagrange để tìm cực trị có điều kiện của hàm số nhiều biến. Các ví dụ minh họa được lựa chọn là các ví dụ tiêu biểu nhằm giúp bạn đọc có cái nhìn trực quan, đầy đủ về nội dung mà nhóm tác giả muốn truyền tải. Hi vọng rằng bài báo này sẽ là tài liệu tham khảo hữu ích cho các bạn sinh viên khoa Toán.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] T. N. Dũng, Giải tích và các bài toán cực trị, Phần 2, Thông Tin Toán học, 22 (4) (2018), 22-26. 12
- [2] T. Đ. Long, N. Đ. Sang và H. Q. Toàn, *Giáo trình Giải tích, Tập 1: Phép tính vi phân của hàm một và nhiều biến*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2005. 2, 3, 4, 6, 7, 12
- [3] N. T. K. Sơn, N. N. Thắng, N. T. Liên, *Giáo trình Giải tích hàm nhiều biến*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2019. 8, 9, 12
- [4] J. Stewart, *Essential Calculus: Early Transcendentals*, 2nd edition, Brooks Cole, 2012. 4
- [5] Website: “<https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus>”. 12



CHÉO HÓA MA TRẬN VÀ MỘT VÀI ỨNG DỤNG

Nguyễn Thị Thương Huyền, Nguyễn Thị Thu Huyền - K43B SPT
Nguyễn Thị Lan - K43C SPT và Chu Thị Bích Thảo - K43B SPT
Khoa Toán, ĐHSP Hà Nội 2

Tóm tắt. Bài báo trình bày về một tiêu chuẩn chéo hóa ma trận trên một trường bất kỳ. Đồng thời, chúng tôi cũng đưa ra một số ứng dụng của chéo hóa trên việc tính toán lũy thừa ma trận, xác định số hạng tổng quát của dãy số, khai căn ma trận. Ngoài ra, chúng tôi khảo sát một vài tính chất đặc biệt liên quan đến vết và định thức của ma trận thông qua các giá trị riêng của ma trận.

1. MỞ ĐẦU

Trong Đại số tuyến tính, việc thu gọn một ma trận về dạng đường chéo, đây là lớp ma trận có dạng đơn giản nhất, có ý nghĩa rất quan trọng trong việc xem xét các cấu trúc của các ánh xạ tuyến tính, các dạng toàn phương, ... Điều này cho chúng ta thấy rằng, việc tìm hiểu về chéo hóa một ma trận hay một tự đồng cấu là một chủ đề cần thiết trong đại số tuyến tính và ứng dụng. Trên thực tế, các nội dung liên quan đến chéo hóa một ma trận hay một tự đồng cấu nhận được sự quan tâm của rất nhiều người, tập trung vào nhiều lĩnh vực khác nhau.

Trong bài báo này, phần thứ nhất chúng tôi tập trung vào một định lý rất quan trọng về điều kiện cần và đủ để một ma trận chéo hóa được. Phần tiếp theo, chúng tôi quan tâm đến một vài ứng dụng của chéo hóa để đưa ra các ứng dụng cho việc:

- i) Tính lũy thừa ma trận,
- ii) Xác định số hạng tổng quát của một dãy truy hồi tuyến tính,
- iii) Giải một số kiểu phương trình ma trận (khai căn ma trận).

Bên cạnh đó, chúng tôi sử dụng các giá trị riêng và việc chéo hóa ma trận để khảo sát một số tính chất liên quan đến **vết** và **định thức** của một ma trận.

Trong toàn bộ bài báo này, chúng tôi luôn kí hiệu:

- $\mathbb{R}$ là trường các số thực.
- $\mathbb{K}$ là trường bất kì có đặc số 0.
- $\mathbb{E}$ là không gian vectơ hữu hạn chiều.
- $GL_n(\mathbb{K})$ là nhóm các tự đồng cấu khả nghịch của một không gian vectơ chiều n .
- $\text{Mat}(n, \mathbb{K})$ là không gian các ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{K}$.

2. TÍNH CHÉO HÓA ĐƯỢC

Định nghĩa 2.1.

- i) Cho $f \in \text{End}(\mathbb{E})$ là tự đồng cấu của $\mathbb{E}$. Ta nói rằng f chéo hóa được trên $\mathbb{R}$ nếu tồn tại một cơ sở $(e) = \{e_i\}_{i=1}^n$ của $\mathbb{E}$ sao cho $\text{Mat}_{(e)}(f)$ là ma trận chéo.
- ii) Giả sử $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$. Ta nói rằng A chéo hóa được nếu A đồng dạng với ma trận chéo nào đó.

Nhận xét.

- i) Nói riêng, A chéo hóa được khi và chỉ khi tồn tại ma trận khả nghịch $P \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$ và ma trận chéo D sao cho

$$A = PDP^{-1}.$$

- ii) Cho $(e) = \{e_i\}_{i=1}^n$ là một cơ sở của E và $A = \text{Mat}_{(e)}(f)$. Khi đó f chéo hóa được khi và chỉ khi A chéo hóa được.

Bổ đề 2.1. Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$ và $\lambda \in \mathbb{K}$.

- i) Khi đó λ là giá trị riêng của A khi và chỉ khi $\exists X \in \mathbb{K}^n, X \neq 0$ sao cho $AX = \lambda X$. Véc tơ X là vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng λ .
- ii) Đa thức $\det(A - \lambda I_n)$ được gọi là đa thức đặc trưng của A , kí hiệu χ_A .
- iii) Với mọi vectơ riêng λ của A , không gian vectơ con $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ của $\mathbb{K}^n$ được gọi là không gian vectơ con riêng của A liên kết với giá trị riêng λ của A .

Từ định nghĩa của tự đồng cấu tuyến tính chéo hóa được, chúng ta có thể thu được ngay mệnh đề sau đây. Chứng minh là đơn giản, chúng tôi sẽ không trình bày ở đây.

Định lý 2.1. Cho $f \in \text{End}(\mathbb{E})$ là tự đồng cấu của $\mathbb{E}$. Các khẳng định sau đây là tương đương:

- i) f chéo hóa được.
- ii) Tồn tại một cơ sở của $\mathbb{E}$ được tạo nên từ các vectơ riêng của f .
- iii) Tổng các số chiều của các không con riêng của f bằng $\dim(\mathbb{E})$.

Định lý sau là một điều kiện cần và đủ của tính chéo hóa được của tự đồng cấu cho bởi đa thức đặc trưng và các không gian con riêng.

Định lý 2.2. Cho $f \in \text{End}(\mathbb{E})$ là tự đồng cấu của $\mathbb{E}$. Khi đó f chéo hóa được khi và chỉ khi đa thức đặc trưng χ_f tách được trên $\mathbb{K}$ và với mỗi giá trị riêng λ số chiều của không gian riêng $\mathbb{E}_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda)$ bằng số bội của nó.

Chứng minh. Xem [2], Định lý, trang 51. □

Cho $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$ là một ma trận vuông cấp n và

$$g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{K}[x]$$

là một đa thức bậc n với hệ số trong $\mathbb{K}$. Đa thức ma trận $g(A)$ là một ma trận vuông cấp n với hệ số trong $\mathbb{K}$ như sau

$$g(A) = \sum_{i=0}^n a_i A^i = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n.$$

Mục đích tiếp theo của chúng tôi là chứng minh định lý về điều kiện cần và đủ về tính chéo hóa được của một tự đồng cấu. Để chứng minh định lý, đầu tiên chúng tôi cần bổ đề sau đây.

Bổ đề 2.2. $\text{Mat}(n, \mathbb{K})$ là một ma trận vuông cấp n với hệ số trong $\mathbb{K}$. Giả sử $g(x), h(x) \in \mathbb{K}[x]$ sao cho

$$(g(x), h(x)) = 1 \text{ và } p(x) = g(x) \cdot h(x).$$

Khi đó

$$\text{Ker}[g(A)] \oplus \text{Ker}[h(A)] = \text{Ker}[p(A)].$$

Chứng minh. Do $(g(x), h(x)) = 1$ nên tồn tại $\alpha(x), \beta(x) \in \mathbb{K}[x]$ sao cho

$$\alpha(x)g(x) + \beta(x)h(x) = 1.$$

Vì vậy, mọi $v \in \mathbb{E}$ ta có

$$[\alpha(A) \cdot g(A)(v)] + [\beta(A) \cdot h(A)(v)] = v.$$

Đặt

$$\begin{cases} v_h = \alpha(A) \cdot g(A)(x), \\ v_g = \beta(A) \cdot g(A)(x). \end{cases}$$

Giả sử $v \in \text{Ker } p(A)$, thì $p(A)v = 0$. Do đó, ta được

$$\begin{cases} h(A)v_h = h(A) \cdot \alpha(A) \cdot g(A)(x) = 0, \\ g(A)v_g = g(A) \cdot \beta(A) \cdot h(A)(x) = 0. \end{cases}$$

Vì vậy

$$\begin{cases} v_h \in \text{Ker } h(A), \\ v_g \in \text{Ker } g(A). \end{cases}$$

Giả sử

$$z \in \text{Ker } h(A) \cap \text{Ker } g(A).$$

Khi đó, ta có

$$z = \alpha \cdot h(A)(z) + \beta \cdot g(A)(z) = 0 + 0 = 0.$$

Vì vậy, ta thu được:

$$\text{Ker}[g(A)] \oplus \text{Ker}[h(A)] = \text{Ker}[p(A)].$$

Bổ đề được chứng minh. $\square$

Định lý 2.3. Cho A là ma trận thực vuông cấp n . Khi đó A chéo hóa được khi và chỉ khi tồn tại $m(X) \in \mathbb{K}[X]$ là đa thức tách đơn sao cho $m(A) = 0$.

Chứng minh.

Điều kiện cần. Giả sử A chéo hóa được. Viết đa thức đặc trưng của A trong dạng:

$$P_A(X) = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_s)^{\alpha_s},$$

ở đây $\lambda_i \neq \lambda_j, \lambda_i \in \mathbb{K}$. Đặt

$$m(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_s).$$

Ta có $m(X)$ là đa thức cực tiểu của A và tách đơn. Theo định lý Cayley-Hamilton, ta được

$$m(A) = 0.$$

Điều kiện đủ. Giả sử $m(X)$ tách đơn, ta có

$$m(X) = (X - a_1) \dots (X - a_s); a_i \in \mathbb{K}, a_i \neq a_j.$$

Áp dụng Bổ đề 2.2 cho đa thức $m(X)$, do $m(A) = 0$, ta thu được

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &= \text{Ker } m(A) \\ &= \text{Ker}(A - a_1) \oplus \text{Ker}[(A - a_2) \dots (A - a_s)] \\ &= \text{Ker}(A - a_1) \oplus \text{Ker}(A - a_2) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(A - a_s). \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ A chéo hóa được. $\square$

3. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

3.1. Lũy thừa ma trận

Giả sử $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$. Giả sử A chéo hóa được, khi đó tồn tại ma trận khả nghịch P trong $\text{Mat}(n, \mathbb{K})$ và $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sao cho

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Vì vậy, mỗi $k \in \mathbb{N}$ ta có

$$A^k = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Nhờ kết quả này, chúng ta có thể tính toán được lũy thừa của các ma trận chéo hóa được một cách đơn giản.

Ví dụ 3.1. Giả sử

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Khi đó với mỗi $k \in \mathbb{N}$ ta có

$$A^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}16^k & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}16^k & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}16^k \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}16^k & \frac{1}{3} + \frac{1}{6}16^k & -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}16^k \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}16^k & -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}16^k & \frac{1}{3} + \frac{1}{6}16^k \end{pmatrix}.$$

Chứng minh. Thật vậy, ta có đa thức đặc trưng $\chi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 16)$. Theo Định lý chính, A chéo hóa được. Các không gian véc tơ con riêng tương ứng là

$$V_0 = \langle (0, 1, 1) \rangle; V_1 = \langle (1, 1, -1) \rangle; V_{16} = \langle (2, -1, 1) \rangle.$$

Từ đây, ta tìm được

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

thỏa mãn

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Vì vậy, ta được

$$A^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}16^k & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}16^k & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}16^k \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}16^k & \frac{1}{3} + \frac{1}{6}16^k & -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}16^k \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}16^k & -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}16^k & \frac{1}{3} + \frac{1}{6}16^k \end{pmatrix}.$$

□

Ví dụ 3.2. Giả sử

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$e^A = \begin{pmatrix} \frac{e}{3} + \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{6} & -\frac{e}{3} + \frac{e^4}{6} & -\frac{e}{2} + \frac{e^4}{4} \\ -\frac{2}{3}e + \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{6} & \frac{2}{3}e + \frac{e^4}{3} & -\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{4} \\ -\frac{e}{3} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{6} & -\frac{e}{3} + \frac{e^4}{3} & \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} \end{pmatrix}.$$

Chứng minh. Tương tự như Ví dụ 3.1, ta cũng dễ dàng tìm được

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

sao cho

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Mặt khác, ta có $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$. Điều này suy ra

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} P \frac{D^k}{k!} P^{-1} = P \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} P^{-1}.$$

Do đó với mọi $k \in \mathbb{N}$ ta có

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$e^A = P \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{e}{3} + \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{6} & -\frac{e}{3} + \frac{e^4}{6} & -\frac{e}{2} + \frac{e^4}{4} \\ -\frac{2}{3}e + \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{6} & \frac{2}{3}e + \frac{e^4}{3} & -\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{4} \\ -\frac{e}{3} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{6} & -\frac{e}{3} + \frac{e^4}{3} & \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} \end{pmatrix}.$$

Ta được điều phải chứng minh. □

3.2. Dãy truy hồi tuyến tính

Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Xét các dãy truy hồi tuyến tính đồng thời cấp 1 với hệ số không đổi $(x_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (x_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ xác định bởi

$$(C) \begin{cases} x_{1,0} = \alpha_1, \dots, x_{n,0} = \alpha_n, \\ x_{i,k+1} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{jk}, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Đặt

$$X_k = \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ \dots \\ x_{n,k} \end{pmatrix}.$$

Khi đó (C) được đưa về

$$X_{k+1} = A^{k+1}X_0,$$

trong đó

$$X_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Do đó, việc xác định X_k được quy về tính các lũy thừa A^k .

Ví dụ 3.3. Cho các dãy u_n, v_n, w_n được xác định bởi $u_0 = 1, v_0 = 2, w_0 = 3$ và với mỗi $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 11u_n - 5v_n + 5w_n, \\ v_{n+1} = -5u_n + 3v_n - 3w_n, \\ w_{n+1} = 5u_n - 3v_n + 3w_n. \end{cases}$$

Xác định công thức tổng quát của các dãy u_n, v_n, w_n .

Lời giải. Đặt

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Khi đó, $\forall n \in \mathbb{N}$ ta có

$$X_n = A^n X_0.$$

Xét đa thức đặc trưng

$$\chi_\lambda(A) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 16).$$

Vì A có 3 giá trị riêng và A là ma trận cấp 3 nên A chéo hóa được. Khi đó, theo định lý chính, A chéo hóa được. Các không gian véc tơ con riêng tương ứng là:

$$V_0 = \langle (0, 1, 1) \rangle; V_1 = \langle (1, 1, -1) \rangle; V_{16} = \langle (2, -1, 1) \rangle.$$

Ta thấy rằng các ma trận

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

thỏa mãn

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Do đó, ta được

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}16^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}16^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}16^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}16^n & \frac{1}{3} + \frac{1}{6}16^n & -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}16^n \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}16^n & -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}16^n & \frac{1}{3} + \frac{1}{6}16^n \end{pmatrix}.$$

Vì vậy, ta có

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = 16^n, \\ v_n = \frac{-1}{2} \cdot 16^n, \\ w_n = \frac{1}{2} \cdot 16^n. \end{cases}$$

3.3. Giải phương trình ma trận

Trong mục này, chúng tôi luôn xét A là ma trận vuông cấp n chéo hóa được, hệ số thực.

Bài toán 1. Xét phương trình ma trận

$$X^2 = A. \quad (1)$$

a) Tìm điều kiện của ma trận A để (1) có nghiệm, tức là tồn tại ma trận vuông thực cấp n X sao cho $X^2 = A$.

b) Khi đó giải (1).

Lời giải. Vì ma trận A chéo hóa được nên tồn tại P khả nghịch sao cho

$$P^{-1}AP = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow P^{-1}X^2P = P^{-1}AP = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}XP)^2 = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)^2. \end{aligned}$$

Vì vậy, phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\forall a_i \geq 0, i = \overline{1, n}$. Hơn nữa, nghiệm của phương trình có dạng

$$X = P \cdot \text{diag}(\pm\sqrt{a_1}, \pm\sqrt{a_2}, \dots, \pm\sqrt{a_n}) \cdot P^{-1}.$$

Mở rộng 3.1. Xét phương trình ma trận

$$X^3 = A. \quad (2)$$

Sử dụng phương pháp tương tự như trong lời giải Bài toán 1, ta thấy rằng phương trình (2) có nghiệm $\forall a_i, i = \overline{1, n}$. Nghiệm của phương trình có dạng

$$X^3 = P \cdot \text{diag}(\sqrt[3]{a_1}, \sqrt[3]{a_2}, \dots, \sqrt[3]{a_n}) \cdot P^{-1}.$$

Mở rộng 3.2. Cho A là ma trận vuông cấp n chéo hóa được, hệ số thực. Xét phương trình ma trận

$$X^n = A. \quad (3)$$

Sử dụng phương pháp tương tự như trong lời giải Bài toán 1, chúng ta thu được

i) Nếu n chẵn thì phương trình (3) có nghiệm khi và chỉ khi $a_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}$. Khi đó

$$X = P \cdot \text{diag}(\pm \sqrt[n]{a_1}, \pm \sqrt[n]{a_2}, \dots, \pm \sqrt[n]{a_n}) \cdot P^{-1}.$$

ii) Nếu n lẻ thì phương trình (3) luôn có nghiệm. Khi đó

$$X^n = P \cdot \text{diag}(\sqrt[n]{a_1}, \sqrt[n]{a_2}, \dots, \sqrt[n]{a_n}) \cdot P^{-1}.$$

Ví dụ 3.4. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R}).$$

Giải phương trình ma trận $X^2 = A$.

Lời giải. Đa thức đặc trưng của ma trận A :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

Thực hiện chéo hóa, ta thấy rằng tồn tại P khả nghịch sao cho

$$P^{-1}AP = B,$$

trong đó

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Phương trình

$$X^2 = A \tag{4}$$

có nghiệm

$$X^2 = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1^2 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Vì vậy, các nghiệm của (4) là

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 3.5. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Giải phương trình ma trận

$$X^2 = A. \tag{5}$$

Lời giải. Đa thức đặc trưng của ma trận A :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = 2, \\ \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

Thực hiện chéo hóa, tồn tại P khả nghịch sao cho

$$P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do đó, phương trình (5) vô nghiệm.

3.4. Tính toán vết và định thức qua giá trị riêng

Cho A là ma trận thực vuông cấp n và $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là tất cả các giá trị riêng của A (bao gồm cả bội). Khi đó:

1. Vết của A được xác định bởi:

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

2. Định thức của A được xác định bởi:

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

Trong phần này, chúng tôi sẽ ứng dụng mối quan hệ giữa định thức, vết và các giá trị riêng của ma trận để xác định một số đặc trưng của định thức và vết của một số ma trận vuông trong các trường hợp đặc biệt.

Ví dụ 3.6. Cho $A = [a_{ij}]_n$ là ma trận vuông cấp n thoả mãn:

$$A^3 - A = 0.$$

Khi đó

$$-n \leq \text{tr}(A) \leq n \text{ và } \det A \in \{-1, 0, 1\}.$$

Chứng minh. Xét

$$P(X) = X^3 - X = (X^2 - X)X.$$

Do $P(X)$ là tách đơn nhận ma trận A làm nghiệm nên ma trận A chéo hóa được. Hơn nữa, từ định lý chính, các giá trị riêng của A chỉ có thể là nghiệm của $P(X)$. Khi đó tồn tại ma trận khả nghịch Q sao cho

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

trong đó $\lambda_i \in \{0, 1, -1\}$. Bởi vì

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

nên

$$-n \leq \operatorname{tr}(A) \leq n.$$

Mặt khác, ta có $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_n$. Vì vậy, ta được

$$\det A \in \{-1, 0, 1\}.$$

Ta được điều phải chứng minh. □

Ví dụ 3.7. Cho $A = [a_{ij}]_n$ là ma trận vuông cấp n thỏa mãn:

$$A^2 - 3A + 2I = 0.$$

Khi đó:

- i) $\operatorname{tr}(A)$ là số nguyên và $n \leq \operatorname{tr}(A) \leq 2n$.
- ii) $\det(A)$ là một số tự nhiên không nhỏ hơn 1.

Chứng minh. Xét

$$P(X) = X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2).$$

Do $P(X)$ là tách đơn nhận ma trận A làm nghiệm nên A chéo hóa được. Hơn nữa, từ định lý chính, các giá trị riêng của A chỉ có thể là nghiệm của $P(X)$. Khi đó tồn tại ma trận khả nghịch Q sao cho

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

trong đó $\lambda_i \in \{1, 2\}$. Vì vậy, ta có

$$n \leq \operatorname{tr}(A) \leq 2n$$

và $\det(A)$ là một số tự nhiên không nhỏ hơn 1. □

Tương tự như các ví dụ tính toán ở trên, chúng tôi cung cấp một vài ví dụ khác sau đây.

Ví dụ 3.8. Cho $A = [a_{ij}]_n$ là ma trận vuông cấp n thỏa mãn:

$$A^3 = 7A^2 - 12A.$$

Khi đó, ta có

$$\operatorname{tr}(A) \leq 2n \text{ và } \det(A) \text{ là một số tự nhiên.}$$

Chứng minh. Chú ý ở đây, ma trận A triệt tiêu bởi đa thức tách đơn

$$P(X) = X(X - 1)(X - 3)(X - 4).$$

□

Ví dụ 3.9. Cho $A = [a_{ij}]_n$ là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^3 = A^2$ và $\text{tr}(A) = n$. Khi đó các giá trị riêng của A là 1. Đặc biệt, $A = I_n$.

Chứng minh. Ma trận A bị triệt tiêu bởi đa thức

$$P(X) = X^2(X - 1).$$

Hơn nữa, tương tự như chứng minh định lý chính, các giá trị riêng của A chỉ có thể là 0 hoặc 1. Bởi dùng $\text{tr}(A) = n$, tất cả các giá trị riêng của A đều là 1. Nói riêng, ma trận A khả nghịch. Từ giả thiết, ta được $A^3 = A^2$ kéo theo

$$A^{-1}A^3 = A^{-1}A^2.$$

Vì vậy, $A = I$.

□

Dựa trên các tính toán tương tự chúng tôi cung cấp thêm một số bài toán mở rộng tương ứng của các ví dụ trên.

Mở rộng 3.3. Cho $A = [a_{ij}]_n$ là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^3 = 4A - 3$. Khi đó $\text{tr}(A)$ là một số tự nhiên thỏa mãn $0 \leq \text{tr}(A) \leq 3n$. Hơn nữa,

$$\det(A) \in \{(-2)^n, 0, 2^n\}.$$

Mở rộng 3.4. Cho $A = [a_{ij}]_n$ là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^2 = 5A - 6I$. Khi đó $\text{tr}(A) \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $2n \leq \text{tr}(A) \leq 3n$. Hơn nữa,

$$\det(A) \in \mathbb{N} \text{ và } 4 \leq \det(A) \leq 3^n.$$

Mở rộng 3.5. Cho $A = [a_{ij}]_n$ là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^4 = A^3$. Khi đó $\text{tr}(A) = n$.

Lời cảm ơn

Tác giả chân thành cảm ơn ThS. Phạm Thanh Tâm, người đã trực tiếp và tận tình hướng dẫn tác giả trong quá trình hoàn thiện bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] N. H. V. Hưng, *Đại số tuyến tính*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2005.
- [2] J. M. Monier, *Giáo trình toán-Tập 6: Đại số 2*, NXB Giáo dục, 2006.



DẪY FAREY VÀ ỨNG DỤNG

Nguyễn Thị Hương - K43 TTA
Khoa Toán, ĐHSP Hà Nội 2

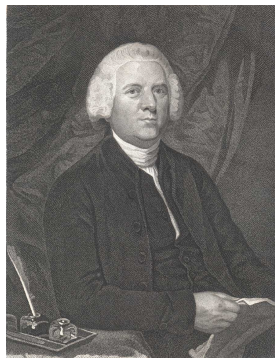
Giới thiệu. Dãy Farey là một dãy số nổi tiếng trong toán học. Nó được đặt tên theo tên nhà địa chất học người Anh John Farey Sr. (24/9/1766 – 6/1/1826). Bức thư viết về dãy Farey của ông được công bố trên “Tập chí Triết học” vào năm 1816. Farey chỉ phỏng đoán, mà không cung cấp bất kỳ chứng minh nào. Trong đó ông chỉ ra rằng mỗi số hạng mới được bổ sung vào dãy Farey thứ n là số hạng trung gian có thể nhận được từ hai số hạng cạnh nhau bằng cách cộng tương ứng tử và mẫu. Augustin-Louis Cauchy đã đọc bức thư của Farey và ông đã cung cấp một chứng minh trong “Excercises de mathématique” của mình, và quy kết quả này cho Farey. Trên thực tế, một nhà toán học khác, Charles Haros, đã công bố kết quả tương tự vào năm 1802 mà Farey hoặc Cauchy không biết đến. Do đó, đây là một sự ngẫu nhiên đã gắn tên của Farey với dãy số này.

Trong bài viết này, chúng tôi sẽ đưa ra cách xây dựng và định nghĩa của một dãy Farey, đồng thời cũng đưa ra một số tính chất đặc trưng của nó. Hơn thế nữa, ở phần cuối của bài viết, tôi đưa ra một số ứng dụng của dãy Farey để thể hiện mối liên hệ mật thiết của nó với Lý thuyết số và Hình học.

1. DẪY FAREY

1.1. Một số định nghĩa

Định nghĩa 1.1. Cho số nguyên dương n . Phân số tối giản $\frac{p}{q} \in [0; 1]$ được gọi là phân số Farey bậc n nếu $q \leq n$. Dãy tăng tất cả các phân số Farey bậc n được gọi là dãy Farey bậc n , ký hiệu là F_n .



Nhà địa chất học và nhà văn John Farey Sr. (1776-1826) (nguồn: Wikipedia).

Ví dụ 1.1. Dãy Farey bậc 5:

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\} \\ F_2 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\} \\ F_3 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\} \\ F_4 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\} \\ F_5 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}. \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.2. Nếu $\frac{a}{b}$ là một phân số thuộc dãy Farey thì $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{a}$ được gọi là phần bù của nó.

Ví dụ 1.2.

i) $\frac{0}{0}$ có phần bù là $\frac{1}{1}$.

ii) $\frac{1}{2}$ là phân số duy nhất không có cặp vì nó cũng là phần bù của chính nó.

Vì vậy, luôn tồn tại một số lẻ của các phân số trong dãy Farey bất kỳ nằm ngoài bậc 1, mỗi số này đều liên kết với phần bù của nó, ngoại trừ $\frac{1}{2}$.

Trong bảng chuỗi Farey, các mẫu số có một khuôn mẫu. Ví dụ như để xây dựng mẫu số của hàng bậc 7, chúng ta chèn 7 vào bất cứ vị trí nào có hai mẫu số liền nhau của bậc 6 có tổng bằng 7:

Bậc 6	1	6	5	4	3	5	2	5	3	4	5	6	1
Bậc 7		7			7		7	7		7			7

Sau đó, chúng ta có thể đánh số các phân số mới với tử số theo thứ tự từ 1 đến 6 vì có tổng cộng sáu số 7. Tuy nhiên, trong trường hợp tổng quát không tồn tại phân số với mẫu số n vì một số phân số không tồn tại dưới dạng tối giản. Dưới đây là 8 bậc đầu tiên về mẫu của các phân số Farey, trong đó các mẫu số mới được in đỏ.

Bậc 1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																</
-------	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là:

“Vậy thì các tử số có bất kỳ khuôn mẫu nào hay không?”

Chúng tôi nhận thấy rằng cả phân số $\frac{a}{b}$ và phần bù của nó $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$ đều nằm trong cùng một dãy Farey. Dãy Farey luôn luôn có độ lớn tăng dần, vì vậy tổng của phân số thứ hai (từ cuối dãy số Farey) là phần bù của phân số thứ hai (từ đầu dãy số Farey), và cứ như vậy đối với phân số thứ ba, thứ tư, ... cho đến khi chúng ta nhận được phân số trung tâm $\frac{1}{2}$. Các cặp phân số này có cùng mẫu số và tử số của chúng có tổng bằng n , với n là bậc của dãy Farey.

Định nghĩa 1.3. Ta gọi số phân số trong một dãy Farey bậc n là độ dài của dãy Farey. Ký hiệu là $|F_n|$.

Định lý 1.1. Độ dài của một dãy Farey cho trước được cho bởi công thức sau:

$$|F_n| = |F_{n-1}| + \phi(n),$$

trong đó $F_1 = 2$, $\phi(n)$ là hàm Euler được xác định bởi công thức

$$\phi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right), p_i$$

là các k thừa số nguyên tố phân biệt của n , với $n \geq 2$.

Hơn thế nữa độ dài của dãy Farey được tính xấp xỉ bởi:

$$|F_n| \sim \frac{3n^2}{\pi^2}.$$

Chứng minh. Xem tài liệu tham khảo [5], [6]. □

1.2. Một số tính chất đặc trưng của dãy Farey

Định lý 1.2. Cho các số tự nhiên a, b, c và d thỏa mãn

$$0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1 \quad \text{và} \quad bc - ad = 1.$$

Khi đó $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là hai số hạng liên tiếp của dãy F_n , ở đây n là số nguyên dương thỏa mãn

$$\max\{b, d\} \leq n \leq b + d - 1.$$

Chứng minh. Từ $bc - ad = 1$ ta có $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là hai phân số tối giản, mà $\max\{b, d\} \leq n$, suy ra chúng là các số hạng của dãy F_n . Nếu chúng không phải là hai số hạng liên tiếp của F_n thì tồn tại phân số Farey bậc n , ký hiệu $\frac{m}{n}$, thỏa mãn

$$\frac{a}{b} < \frac{m}{n} < \frac{c}{d}.$$

Vì $ck - dh \geq 1$ và $bh - ak \geq 1$ nên

$$\begin{aligned} b + d - 1 &\geq n \geq k \\ &= (bc - ad)k \\ &= b(ck - dh) + d(bh - ak) \\ &\geq b + d, \end{aligned}$$

đây là điều không thể xảy ra. Định lý được chứng minh. $\square$

Với các số tự nhiên a, b, c và d thỏa mãn $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$ phân số $\frac{a+c}{b+d}$ được gọi là phân số trung gian của hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$. Từ chứng minh trên ta có định lý sau đây.

Định lý 1.3. Cho các số tự nhiên a, b, c và d thỏa mãn

$$0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1 \quad \text{và} \quad bc - ad = 1.$$

Khi đó nếu $\frac{h}{k}$ là phân số trung gian của hai phân số $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ thì

$$\frac{a}{b} < \frac{h}{k} < \frac{c}{d} \quad \text{và} \quad bh - ak = 1, ck - dh = 1.$$

Từ Định lý 1.3, chúng ta có thể chứng minh định lý sau đây.

Định lý 1.4. Với mọi số nguyên dương n ta có

- i) Dãy F_{n+1} có được từ dãy F_n bằng cách viết vào giữa hai số hạng liên tiếp của F_n có tổng các mẫu không vượt quá $n + 1$ phân số trung gian của chúng.
- ii) Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ là hai số hạng liên tiếp của F_n thì $bc - ad = 1$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh định lý trên bằng phương pháp quy nạp toán học theo n . Rõ ràng khẳng định đúng với $n = 1$. Giả sử khẳng định đúng với các số nguyên dương bé hơn n ($n \geq 2$), ta sẽ chứng minh khẳng định đúng với n .

Từ Định lý 1.3 và giả thiết quy nạp ta có nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ là hai số hạng liên tiếp của F_n thì $bc - ad = 1$. Sau khi viết vào giữa hai số hạng liên tiếp của F_n có tổng các mẫu không vượt quá $n + 1$ phân số trung gian của chúng ta thu được dãy con F'_n của F_{n+1} . Nếu trong F_{n+1} có phân số $\frac{h}{k}$ không thuộc F'_n thì tồn tại hai số hạng liên tiếp $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ của F'_n sao cho

$$\frac{a}{b} < \frac{h}{k} < \frac{c}{d}.$$

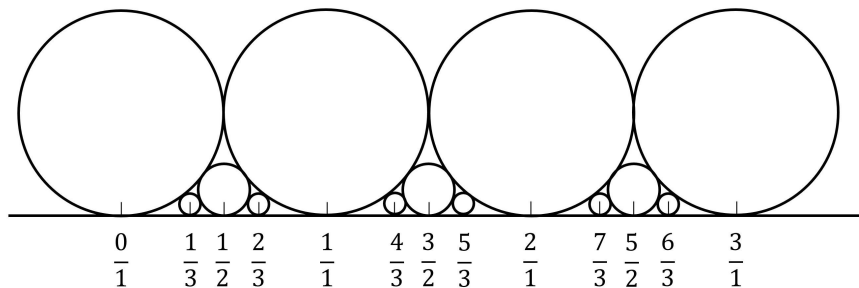
Vì $\frac{h}{k}$ không thuộc F'_n nên nó cũng không thuộc F_n , suy ra $k > n$, kết hợp với $k \leq n + 1$ ta có $k = n + 1$. Mặt khác, từ chứng minh của Định lý 1.3, ta được

$$k = n + 1 \geq b + d.$$

Điều này suy ra $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ là hai phân số liên tiếp của F_n , mà $b + d \leq n + 1$ nên chúng không thể là hai số hạng liên tiếp của F'_n . Điều này là vô lý. $\square$

1.3. Đường tròn Ford và phân số Farey

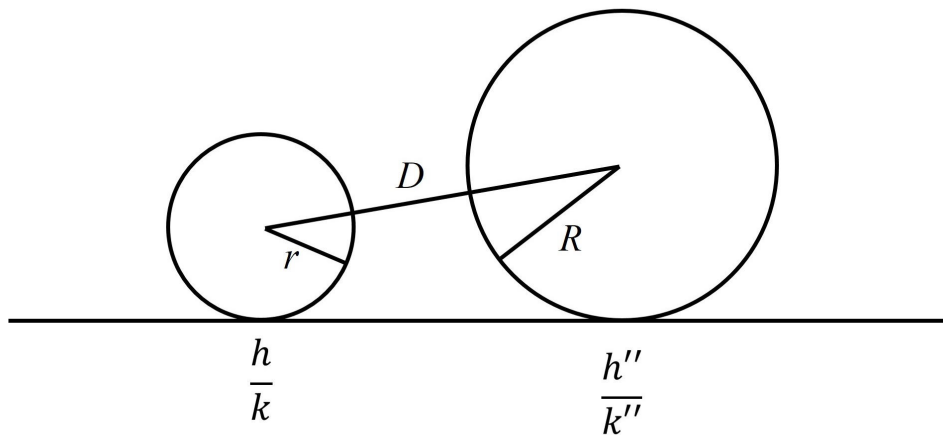
Định nghĩa 1.4. Xét hệ trục tọa độ Oxy . Với mỗi phân số tối giản $\frac{p}{q}$ nằm trên trục Ox , ta dựng các đường tròn tiếp xúc với Ox tại điểm đó, tâm có tọa độ $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$ và bán kính $\frac{1}{2q^2}$, được gọi là đường tròn Ford, kí hiệu là $C[p, q]$.



Định lý 1.5. Xét hai đường tròn Ford khác nhau $C[h, k]$ và $C[h', k']$. Khi đó

- i) Nếu $|hk' - h'k| = 1$ thì hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau.
- ii) Nếu $|hk' - h'k| > 1$ thì hai đường tròn ở ngoài nhau.

Chứng minh.



Gọi D là khoảng cách giữa tâm của 2 đường tròn. I, I' và r, R tương ứng là tâm và bán kính của đường tròn $C[h, k]; C[h', k']$. Khi đó ta có

$$I\left(\frac{h}{k}, \frac{1}{2k^2}\right), I'\left(\frac{h'}{k'}, \frac{1}{2k'^2}\right) \quad \text{và} \quad r = \frac{1}{2k^2}, R = \frac{1}{2k'^2}.$$

Từ đây, ta được

$$r + R = \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k'^2}.$$

Do đó

$$(r + R)^2 = \left(\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k'^2}\right)^2.$$

Khoảng cách giữa tâm của hai đường tròn là

$$D = II' = \sqrt{\left(\frac{h'}{k'} - \frac{h}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{2k'^2} - \frac{1}{2k^2}\right)^2}$$

Từ đó, ta suy ra

$$D^2 = \left(\frac{h}{k} - \frac{h'}{k'}\right)^2 + \left(\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2k'^2}\right)^2.$$

Để khảo sát vị trí tương đối của hai đường tròn $C[h, k]$ và $C[h', k']$, chúng ta xét hiệu số $D^2 - (r + R)^2$. Ta có

$$\begin{aligned} & D^2 - (r + R)^2 \\ &= \left(\frac{h}{k} - \frac{h'}{k'}\right)^2 + \left(\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2k'^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k'^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{h^2}{k^2} - 2\frac{hh'}{kk'} + \frac{h'^2}{k'^2}\right) + \left(\frac{1}{4k^2} - \frac{1}{2k^2k'^2} + \frac{1}{4k'^2}\right) - \left(\frac{1}{4k^2} + \frac{1}{2k^2k'^2} + \frac{1}{4k'^2}\right) \\ &= \frac{h^2}{k^2} - 2\frac{hh'}{kk'} + \frac{h'^2}{k'^2} - \frac{1}{k^2k'^2} \\ &= \frac{h^2k'^2 + h'^2k^2 - 2hh'kk' - 1}{k^2k'^2} \\ &= \frac{(hk' - h'k)^2 - 1}{k^2k'^2}. \end{aligned}$$

Do đó, ta có

i) Hai đường tròn $C[h, k]$ và $C[h', k']$ tiếp xúc ngoài với nhau khi và chỉ khi

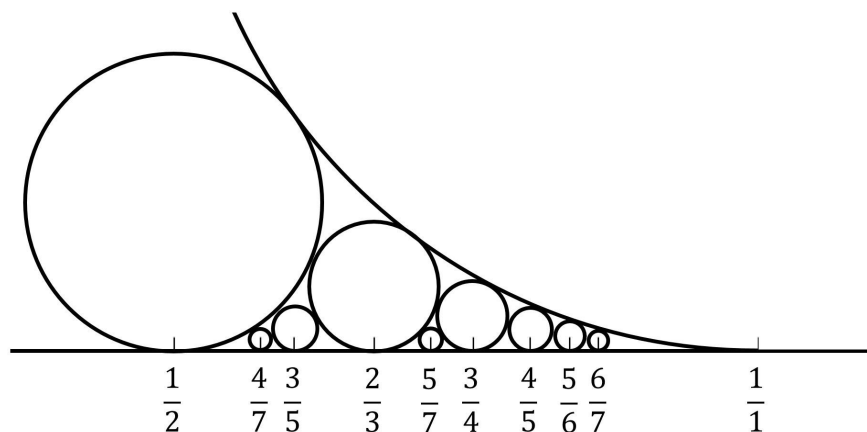
$$\begin{aligned} D^2 - (r + R)^2 = 0 &\Leftrightarrow \frac{(hk' - h'k)^2 - 1}{k^2k'^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (hk' - h'k)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow |hk' - h'k| = 1. \end{aligned}$$

ii) Hai đường tròn $C[h, k]$ và $C[h', k']$ ở ngoài nhau khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} D^2 - (r + R)^2 > 0 &\Leftrightarrow \frac{(hk' - h'k)^2 - 1}{k^2k'^2} > 0 \\ &\Leftrightarrow (hk' - h'k)^2 - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow |hk' - h'k| > 1. \end{aligned}$$

Ta được điều phải chứng minh. □

Từ tính chất này ta dễ dàng thấy được bất cứ hai phân số Farey liên tiếp nào được biểu diễn trên hệ trục tọa độ cũng có hai đường tròn Ford tiếp xúc với nhau. Ta có một ví dụ minh họa sau với chuỗi Farey bậc 7.



Định lý tiếp sau đây sẽ làm rõ hơn về vị trí tiếp xúc của hai đường tròn Ford liên kết với hai phân số Farey liên tiếp.

Định lý 1.6. Cho các phân số Farey liên tiếp

$$\frac{h}{k} < \frac{h''}{k''} < \frac{h'}{k'}.$$

Khi đó

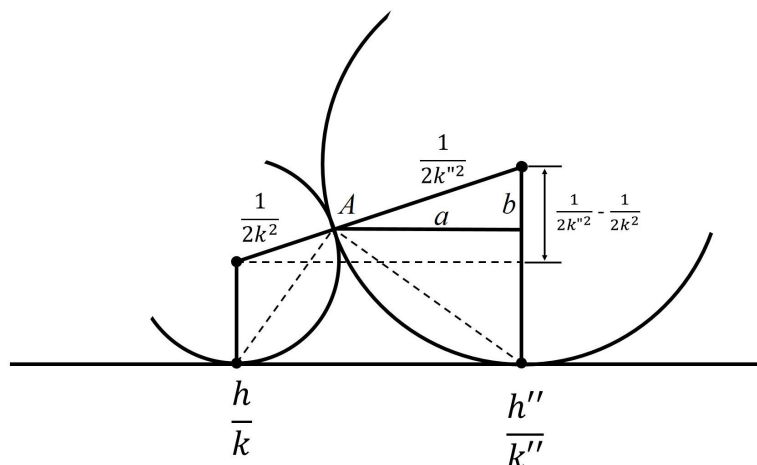
i) $C[h, k]$ tiếp xúc với $C[h'', k'']$ tại

$$A_1 = \left(\frac{h''}{k''} - \frac{k}{k''(k^2 + k''^2)}; \frac{1}{k^2 + k''^2} \right).$$

ii) $C[h', k']$ tiếp xúc với $C[h'', k'']$ tại

$$A_2 = \left(\frac{h''}{k''} + \frac{k'}{k''(k'^2 + k''^2)}; \frac{1}{k'^2 + k''^2} \right).$$

Chứng minh.



Kí hiệu độ dài các đường như trong hình vẽ. Áp dụng định lý Thales, ta có

$$\frac{a}{\frac{h}{k} - \frac{h''}{k''}} = \frac{\frac{1}{2k^2}}{\frac{1}{2k'^2} + \frac{1}{2k^2}} = \frac{b}{\frac{1}{2k'^2} - \frac{1}{2k^2}}.$$

Từ đó, ta thu được

$$a = \frac{\frac{1}{2k^2} \left(\frac{h}{k} - \frac{h''}{k''} \right)}{\frac{1}{2k'^2} + \frac{1}{2k^2}} = \frac{\frac{hk'' - kh''}{2k^3k''}}{\frac{1}{2k'^2} + \frac{1}{2k^2}} = \frac{k}{k''(k^2 + k'^2)},$$

và

$$b = \frac{\frac{1}{2k^2} \left(\frac{1}{2k'^2} + \frac{1}{2k^2} \right)}{\frac{1}{2k'^2} + \frac{1}{2k^2}} = \frac{\frac{1}{4k^2k'^2} - \frac{1}{4k^4}}{\frac{1}{2k'^2} + \frac{1}{2k^2}} = \frac{k^2 - k'^2}{2k'^2(k^2 + k'^2)}.$$

Do đó, ta được

$$a = \frac{k}{k''(k^2 + k'^2)} \quad \text{và} \quad b = \frac{k'^2 - k^2}{2k'^2(k^2 + k'^2)}.$$

Tọa độ điểm $A_1 = (x_1, y_1)$, trong đó

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{h''}{k''} - a \\ &= \frac{h''}{k''} - \frac{k}{k''(k^2 + k'^2)}, \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{h''}{k''} + \frac{1}{2k'^2} - \frac{1}{2k^2} - b \\ &= \frac{1}{k^2 + k'^2}. \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng tính được tọa độ của A_2 . □

2. ỨNG DỤNG CỦA DÃY FAREY TRONG CHỨNG MINH MỘT SỐ ĐỊNH LÝ SỐ HỌC

Trong phần này chúng tôi sẽ giới thiệu một vài ứng dụng dãy Farey vào chứng minh một số kết quả về xấp xỉ số vô tỷ bởi số hữu tỷ.

Định lý 2.1 (Dirichlet, 1842). Cho số thực α và số nguyên $K \geq 1$. Khi đó tồn tại các số nguyên a và q sao cho $1 \leq q \leq K$ và

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q(K+1)}.$$

Chứng minh.

Chứng minh thứ nhất. Phân hoạch khoảng $[0; 1)$ thành $K + 1$ khoảng

$$I_i = \left[\frac{i-1}{K+1}; \frac{i}{K+1} \right)$$

với $i = 1, 2, \dots, K + 1$. Xét K số $\{i\alpha\}$ với $i = 1, 2, \dots, K$.

Nếu tồn tại i sao cho $i\alpha \in I_1$ thì với i đó ta có

$$0 \leq i\alpha - [i\alpha] < \frac{1}{K+1}.$$

Điều này suy ra

$$\left| \alpha - \frac{[i\alpha]}{i} \right| < \frac{1}{i(K+1)},$$

đến đây ta chỉ cần chọn $q = i$ và $a = [i\alpha]$.

Nếu tồn tại i sao cho $\{i\alpha\} \in I_{K+1}$ thì với i đó ta có

$$\frac{K}{K+1} \leq i\alpha - [i\alpha] < 1$$

Điều này suy ra

$$\left| \alpha - \frac{[i\alpha] + 1}{i} \right| \leq \frac{1}{i(K+1)},$$

ta chọn $q = i$ và $a = [i\alpha] + 1$.

Nếu không xảy ra hai trường hợp trên thì tồn tại $i > j$ để $\{i\alpha\}$ và $\{j\alpha\}$ cùng thuộc I_k với k nào đó thỏa mãn $2 \leq k \leq K$. Khi đó, ta được

$$0 \leq |\{i\alpha\} - \{j\alpha\}| < \frac{1}{K+1}.$$

Điều này suy ra

$$\left| \alpha - \frac{[i\alpha] - [j\alpha]}{i - j} \right| < \frac{1}{(i - j)(K+1)},$$

ta chọn $q = i - j$ và $a = [i\alpha] - [j\alpha]$.

Chứng minh thứ hai. Giả sử T_K là mở rộng mod 1 của dãy Farey bậc K , nghĩa là

$$T_K = \left\{ \frac{a}{q} \mid a \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, q \leq K, \gcd(a, q) = 1 \right\}.$$

Với mỗi phân số $\frac{a}{q}$ thuộc T_K , lấy $x < y$ là hai phân số kề với nó trong T_K , nghĩa là

$$x < \frac{a}{q} < y$$

là ba phân số liên tiếp trong T_K . Gọi x' là phân số trung gian của x và $\frac{a}{q}$, y' là phân số trung gian của y và $\frac{a}{q}$. Ta đặt

$$I_{a/d} = [x'; y'].$$

Dễ thấy $\{I_{a/d}\}_{a/d \in T_K}$ là một phủ của $\mathbb{R}$, do đó tồn tại $\frac{a}{d} \in T_K$ sao cho $\alpha \in I_{a/d}$. Để ý rằng cũng như F_K , tổng các mẫu của hai phân số liên tiếp trong T_K không bé hơn $K+1$ và hiệu hai phân số liên tiếp trong T_K là một phân số có tử bằng 1. Điều này suy ra

$$\left| \alpha - \frac{a}{d} \right| \leq \frac{1}{d(K+1)}.$$

Ta được điều phải chứng minh. □

Định lý 2.2 (Dirichlet, 1842). Cho số vô tỷ α . Khi đó có vô hạn phân số tối giản $\frac{a}{q}$ sao cho

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

Hơn nữa ta có thể chọn q lớn tùy ý.

Chứng minh.

Chứng minh thứ nhất. Ta sẽ xây dựng dãy hữu tỷ thỏa mãn bằng quy nạp. Với số nguyên $K \geq 1$ bất kỳ, theo định lý trên, tồn tại phân số $\frac{a}{q}$ sao cho $1 \leq q \leq K$ và

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q(K+1)}.$$

Bằng cách thu gọn $\frac{a}{q}$ nếu cần, ta có thể xem phân số này tối giản. Do $K+1 > q$ nên từ bất đẳng thức trên ta có

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q(K+1)} < \frac{1}{q^2}.$$

Giả sử ta đã xây dựng được dãy các phân số tối giản đôi một khác nhau

$$\frac{a_1}{q_1}, \frac{a_2}{q_2}, \dots, \frac{a_m}{q_m}$$

thỏa mãn bất đẳng thức trong định lý. Vì α là số vô tỷ nên

$$\left| \alpha - \frac{a_i}{q_i} \right| > 0, \quad \forall i,$$

bởi thế nên ta có thể chọn được số nguyên dương K để

$$K > \max \left\{ \left| \alpha - \frac{a_i}{q_i} \right|^{-1} \right\}.$$

Dùng Định lý 1.2 cho số K này ta tìm được phân số tối giản $\frac{a_{m+1}}{q_{m+1}}$ sao cho

$$1 \leq q_{m+1} \leq K,$$

và

$$\left| \alpha - \frac{a_{m+1}}{q_{m+1}} \right| \leq \frac{1}{q_{m+1}(K+1)} < \frac{1}{q_{m+1}^2}.$$

Phân số này khác tất cả các phân số trước vì

$$\left| \alpha - \frac{a_{m+1}}{q_{m+1}} \right| \leq \frac{1}{q_{m+1}(K+1)} < \frac{1}{K} < \min \left\{ \alpha - \frac{a_i}{q_i} \right\}.$$

Để kết thúc chỉ cần để ý rằng với mỗi $q > 1$ chỉ có nhiều nhất hai giá trị a làm cho bất đẳng thức trong định lí đúng.

Chứng minh thứ hai. Không mất tính tổng quát ta giả sử $0 < \alpha < 1$. Ta có thể chọn $a = 0$, $q = 1$ để được một phân số tối giản thỏa mãn.

Giả sử ta đã xây dựng được một vài phân số, ta sẽ chỉ ra một phân số khác cũng thỏa mãn bất đẳng thức trong định lí nhưng khác tất cả các phân số này.

Chọn số nguyên dương n đủ lớn sao cho $\frac{1}{n}$ nhỏ hơn tất cả các khoảng cách từ α đến các phân số đã được tìm. Số α sẽ nằm giữa hai phân số liên tiếp $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ của F_n , giả sử $b \geq d$. Chú ý rằng

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd} \leq \frac{1}{b+d-1} \leq \frac{1}{n}$$

nên cả $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ đều khác tất cả các phân số trước. Hơn nữa

$$\left| \alpha - \frac{c}{d} \right| < \frac{1}{bd} < \frac{1}{d^2}$$

nên ta có thể chọn $\frac{c}{d}$ là phân số tiếp theo. □

Định lý 2.3 (Hurwitz, 1891).

i) Cho số vô tỷ α . Khi đó có vô hạn phân số tối giản $\frac{a}{q}$ sao cho

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{Aq^2},$$

hơn nữa ta có thể chọn q lớn tùy ý.

ii) Cho số thực $A > \sqrt{5}$. Khi đó chỉ có hữu hạn phân số tối giản $\frac{a}{q}$ sao cho

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{Aq^2},$$

ở đây

$$\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Chứng minh.

i) Không mất tính tổng quát ta giả sử $0 < \alpha < 1$. Xét một số nguyên dương n bất kỳ.

Số α sẽ nằm giữa hai phân số liên tiếp $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ của F_n . Ta chỉ cần chứng minh một trong ba phân số

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{c}{d}, \quad \frac{a+c}{b+d}$$

thỏa mãn bất đẳng thức trong định lí, phần sau sẽ làm như trong chứng minh Định lí 1.4.

Giả sử

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \alpha < \frac{c}{d}$$

và cả ba phân số đều không thỏa mãn bất đẳng thức trong định lí, nghĩa là

$$\alpha - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5}b^2}, \quad (1)$$

$$\alpha - \frac{a+c}{b+d} \geq \frac{1}{\sqrt{5}(b+d)^2}, \quad (2)$$

và

$$\frac{c}{d} - \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{5}d^2}. \quad (3)$$

Cộng vế theo vế (1) và (3), ta được

$$\frac{\sqrt{5}}{bd} \geq \frac{1}{b^2} + \frac{1}{d^2}.$$

Cộng vế theo vế (2) và (3), ta có

$$\frac{\sqrt{5}}{d(b+d)} \geq \frac{1}{(b+d)^2} + \frac{1}{d^2}.$$

Đặt $\frac{b}{d} = t$ thì khi đó từ hai kết quả trên ta được một hệ bất phương trình bậc hai ẩn t , giải hệ này ta có

$$t = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \notin \mathbb{Q},$$

điều này là vô lí.

ii) Giả sử bất đẳng thức trên đúng với vô hạn phân số $\frac{a}{q}$. Vì mỗi q chỉ có nhiều nhất hai giá trị a làm cho bất đẳng thức đó đúng nên q chạy trên một tập vô hạn. Viết lại bất đẳng thức trong Định lí 2.3 dưới dạng

$$\begin{aligned} \frac{q\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{Aq} &< \frac{q}{2} + a \\ &< \frac{q\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{Aq}. \end{aligned}$$

Bình phương hai vế của bất đẳng thức trên, ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{A^2q^2} - \frac{\sqrt{5}}{A} &< a^2 + aq + q^2 \\ &< \frac{1}{A^2q^2} + \frac{\sqrt{5}}{A}. \end{aligned}$$

Vì $A > \sqrt{5}$ nên ta có thể chọn q đủ lớn để

$$\begin{aligned} -1 < \frac{1}{A^2 q^2} - \frac{\sqrt{5}}{A} < a^2 + aq + q^2 \\ < \frac{1}{A^2 q^2} + \frac{\sqrt{5}}{A} < 1 \end{aligned}$$

với q này,

$$a^2 + aq + q^2 = 0,$$

điều này là vô lí. □

Ví dụ 2.1 (Euler, 1747). Mọi số nguyên tố dạng $4k + 1$ có thể viết thành tổng của hai số chính phương.

Lời giải. Theo định lý Wilson, tồn tại số nguyên dương c sao cho

$$c^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Áp dụng định lý Dirichlet với $K = [\sqrt{p}]$ và số $\alpha = \frac{c}{p}$, tồn tại các số nguyên a, b sao cho

$$1 \leq b \leq [\sqrt{p}]$$

và

$$\left| \frac{c}{p} - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b(K+1)} < \frac{1}{b\sqrt{p}}. \quad (4)$$

Từ (4), ta có

$$|cb - ap| < \sqrt{p}.$$

Điều này suy ra

$$0 < (cb - ap)^2 + b^2 < 2p.$$

Hơn nữa

$$(cb - ap)^2 + b^2 \equiv b^2(c^2 + 1) \pmod{p}.$$

Điều này suy ra

$$(cb - ap)^2 + b^2 = p.$$

Ví dụ 2.2 (Phương trình Pell). Cho d là số nguyên dương không phải là số chính phương. Xét phương trình Pell

$$x^2 - dy^2 = 1. \quad (5)$$

a) Chứng minh rằng (5) có nghiệm nguyên dương.

b) Cho $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ là hai nghiệm nguyên dương của (5) Chứng minh rằng

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow y_1 < y_2 \Leftrightarrow x_1 + y_1\sqrt{d} < x_2 + y_2\sqrt{d}.$$

- c) Gọi (x', y') là nghiệm nguyên dương của (5) với x' nhỏ nhất. Chứng minh rằng tập nghiệm nguyên dương của (5) là $\{(x_n, y_n) | n = 1, 2, \dots\}$ ở đây $(x_n), (y_n)$ là hai dãy các số nguyên dương xác định bởi

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x' + y'\sqrt{d})^2, \quad \forall n \geq 1.$$

Lời giải.

- a) Vì d không phải số chính phương nên $\sqrt{d}$ là số vô tỷ, do đó theo định lý Dirichlet, tồn tại vô hạn phân số tối giản $\frac{p}{q}$ sao cho

$$\left| \sqrt{d} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Hơn nữa, ta có thể chọn q lớn tùy ý. Với các phân số $\frac{p}{q}$ đó ta có

$$|p^2 - dq^2| < 1 + 2\sqrt{d},$$

suy ra tồn tại số nguyên $c \neq 0$ để có vô hạn phân số tối giản $\frac{p}{q}$ sao cho

$$\left| \sqrt{d} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Trong các phân số thỏa mãn (5), ta chọn hai phân số khác nhau $\frac{p_1}{q_1}$ và $\frac{p_2}{q_2}$ sao cho

$$p_1 \equiv p_2 \pmod{|c|}, \quad q_1 \equiv q_2 \pmod{|c|}.$$

Xét các số hữu tỷ a và b xác định bởi

$$\begin{aligned} a + b\sqrt{d} &= \frac{p_1 + q_1\sqrt{d}}{p_2 + q_2\sqrt{d}} \\ &= \frac{p_1p_2 - dq_1q_2}{c} + \frac{p_2q_1 - p_1q_2}{c}\sqrt{d}. \end{aligned}$$

Theo cách chọn $\frac{p_1}{q_1}$ và $\frac{p_2}{q_2}$ ta có a, b là các số nguyên với $b \neq 0$. Ta thấy $(|a|, |b|)$ là một nghiệm nguyên dương của (5) vì

$$\begin{aligned} a^2 - db^2 &= (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) \\ &= \frac{p_1 + q_1\sqrt{d}}{p_2 + q_2\sqrt{d}} \cdot \frac{p_1 - q_1\sqrt{d}}{p_2 - q_2\sqrt{d}} \\ &= \frac{c}{c} = 1. \end{aligned}$$

- b) Do x_1, y_1, x_2, y_2 là các số nguyên dương thỏa mãn

$$x_1^2 = 1 + dy_1^2, \quad x_2^2 = 1 + dy_2^2$$

nên ta được

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow y_1 < y_2.$$

Từ đây, ta có điều cần chứng minh.

c) Dễ thấy (x_n, y_n) là nghiệm nguyên dương của phương trình với mọi $n = 1, 2, \dots$. Bây giờ giả sử (x_0, y_0) là một nghiệm nguyên dương nào đó của phương trình. Ta sẽ chứng minh tồn tại số nguyên dương n để $(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$, hay

$$x_0 + y_0\sqrt{d} = (x' + y'\sqrt{d})^n.$$

Nếu điều này không xảy ra thì tồn tại số nguyên dương k thỏa mãn

$$(x' + y'\sqrt{d})^k < x_0 + y_0\sqrt{d} < (x' + y'\sqrt{d})^{k+1}.$$

Từ đây, ta có

$$1 < (x_0 + y_0\sqrt{d}) (x' - y'\sqrt{d})^k < x' + y'\sqrt{d} \quad (6)$$

Gọi a và b là các số nguyên xác định bởi

$$a + b\sqrt{d} = (x_0 + y_0\sqrt{d}) (x' - y'\sqrt{d})^k.$$

Từ (2) ta thấy (a, b) là một nghiệm nguyên dương của phương trình (5) và $a < x'$, vô lý.

3. KẾT LUẬN

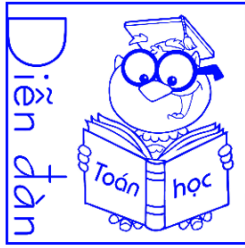
Bài viết nhỏ trên đây của tôi giới thiệu với bạn đọc về dãy Farey và một số tính chất, ứng dụng của nó. Hy vọng thông qua bài viết này, bạn đọc có thể thu được một số kiến thức về dãy Farey thú vị này cũng như tăng thêm kiến thức về Toán học.

Lời cảm ơn

Tác giả chân thành cảm ơn ThS. Nguyễn Thị Trà, người đã trực tiếp và tận tình hướng dẫn tác giả trong quá trình hoàn thiện bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] J. Ainsworth, M. Dawson, J. Pianta and J. Warwick, *The Farey Sequence*, Year 4 Project, School of Mathematics University of Edinburgh, March 15, 2012
- [2] *Fractions in the Farey Series and the Stern-Brocot Tree*,
<http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fractions/fareySB.html>.
- [3] N. T. Tuấn, *Lecture Notes in Mathematics*, High School Olympiads.
<https://nttuan.org/2017/07/09/farey-sequence>
- [4] N. M. Dũng, *Vẻ đẹp của phân số Farey*, Tạp chí Toán học MathVN, số 02, 2009, 15-16.
- [5] D. Zukin, *The Farey Sequence and Its Niche(s)*, May 12, 2016, 3-7. 3
- [6] *Farey Sequence*, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Farey_sequence. 3



VẬN DỤNG DẠY HỌC MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC TRONG DẠY HỌC BÀI TOÁN GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Phạm Tú Uyên, Nguyễn Thị Hà và Nguyễn Thùy Dung - K44A SPT

Khoa Toán, ĐHSPT Hà Nội 2

Tóm tắt. Bài báo trình bày một số vấn đề lý luận về dạy học mô hình hóa toán học và vận dụng lý luận đó vào dạy học bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số.

1. MỞ ĐẦU

Chương trình giáo dục phổ thông 2018 đang hướng tới phát triển 5 năng lực toán học cho học sinh, trong các năng lực đó, năng lực mô hình hóa toán học là năng lực được chú trọng nhiều. Dạy học mô hình hóa (DH MHH) toán học sẽ giúp học sinh phát triển được năng lực mô hình hóa toán học và thấy được ý nghĩa của việc học toán. Không những vậy, DH MHH giúp học sinh cảm thấy hứng thú với môn học bằng cách tăng cường, sáng tỏ các yếu tố toán học trong thực tiễn, qua đó giúp học sinh hiểu sâu và vận dụng được kiến thức. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số là một trong số các kiến thức toán học có nhiều ứng dụng trong thực tiễn và có nhiều cơ hội vận dụng mô hình hóa toán học trong nội dung này. Do vậy trong bài viết này, chúng tôi đề cập việc vận dụng dạy học mô hình hóa trong dạy học bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số.

2. NỘI DUNG

2.1. Một số vấn đề dạy học mô hình hóa toán học

2.1.1. Khái niệm DH MHH toán học

Nói về mô hình hóa trong dạy học Toán, tác giả Lê Văn Tiến [4] phân biệt hai khái niệm DH MHH và DH bằng MHH.

- DH MHH là dạy học thông qua dạy học cách thức xây dựng mô hình toán học của thực tiễn, nhằm tới trả lời cho những câu hỏi, vấn đề nảy sinh từ thực tiễn.
- Quy trình DH MHH là: DH tri thức toán học lý thuyết $\rightarrow$ Vận dụng các tri thức này vào việc giải các bài toán thực tiễn và xây dựng mô hình của thực tiễn.
- Quy trình DH bằng MHH là: Bài toán thực tiễn $\rightarrow$ Xây dựng mô hình toán học $\rightarrow$ Câu trả lời cho bài toán thực tiễn $\rightarrow$ Tri thức cần giảng dạy $\rightarrow$ Vận dụng tri thức này vào giải các bài toán thực tiễn [4]. Như vậy, tri thức toán học cần giảng dạy sẽ nảy sinh qua quá trình giải quyết các bài toán thực tiễn. Như vậy, DH MHH toán học là cách thức dạy học từ mô hình thực tiễn hướng dẫn học sinh hình thành kiến thức hoặc vận dụng kiến thức vào giải bài tập.

Như vậy, DH MHH toán học là cách thức dạy học từ mô hình thực tiễn hướng dẫn học sinh hình thành kiến thức hoặc vận dụng kiến thức vào giải bài tập.

2.1.2. Vai trò, ý nghĩa dạy học mô hình hóa toán học

a. Phát triển năng lực toán học

Dạy học mô hình hóa toán học góp phần phát triển năng lực Toán học cho học sinh, đặc biệt là năng lực mô hình hóa toán học và năng lực giải quyết vấn đề. Có thể hiểu năng lực mô hình hóa toán học là năng lực người học chuyển dữ liệu từ thực tế sang cấu trúc toán học, giải quyết bài toán và đưa ra nhận xét cho tình huống thực tế đó. Biểu hiện cụ thể của năng lực mô hình hóa là:

- Xác định được mô hình toán học (gồm công thức, phương trình, bảng biểu, đồ thị,...) cho tình huống xuất hiện trong bài toán thực tiễn.
- Giải quyết được những vấn đề toán học trong mô hình được thiết lập.
- Thể hiện và đánh giá được lời giải trong ngữ cảnh thực tế và cải tiến được mô hình nếu cách giải quyết không phù hợp.

Năng lực giải quyết vấn đề là năng lực hoạt động trí tuệ của con người trước những vấn đề, bài toán cụ thể, có mục tiêu có tính hướng đích cao, đòi hỏi phải huy động khả năng tư duy tích cực và sáng tạo nhằm tìm ra lời giải cho vấn đề. Năng lực giải quyết vấn đề toán học thể hiện qua việc:

- Nhận biết, phát hiện được vấn đề cần giải quyết bằng toán học.
- Lựa chọn, đề xuất được cách thức, giải pháp giải quyết vấn đề.
- Đánh giá được giải pháp đề ra và khái quát hoá được cho vấn đề tương tự [2].

Rõ ràng, DH MHH yêu cầu học sinh thiết lập được mô hình toán học lựa chọn cách thức quy trình giải quyết vấn đề và giải quyết được những vấn đề toán học trong mô hình được thiết lập, từ đó năng lực mô hình hóa toán học và năng lực giải quyết đề của học sinh được nâng cao.

b. Tạo hứng thú học tập môn Toán

Phát huy tính chủ động, tích cực, tạo hứng thú học tập cho học sinh trong quá trình học. Kiến thức không được truyền dạy một cách thụ động từ giáo viên (GV) mà được học sinh hình thành từ việc tìm hiểu, suy nghĩ, giải quyết bài toán thực tiễn. Điều này sẽ tạo hứng thú, khơi gợi sự tò mò, nhu cầu tiếp thu kiến thức toán học và thầy được toán học có ý nghĩa trong thực tiễn. Nghiên cứu cho thấy bài toán mô hình hóa gây hứng thú cho học sinh nhiều hơn là việc giải một phương trình hoặc vận dụng toán học giải quyết vấn đề không liên hệ với thực tiễn [3].

c. Tăng cường mối liên hệ toán học với thực tiễn

DH MHH được mọi người quan tâm vì nó cho phép liên kết toán học với thực tiễn, có thể đóng góp phần nào trong việc hướng tới ý nghĩa của việc học tập và giảng dạy toán học. Hoạt động DH MHH toán học là một cách tiếp cận giúp HS vận dụng tri thức linh hoạt, tạo cơ hội cho các em học tập thông qua các vấn đề, tình huống gần gũi với thực tiễn.

Trong quá trình tìm hiểu và giải quyết các vấn đề thực tiễn, DH MHH toán học cho phép HS phát hiện bản chất của vấn đề và giải quyết những vấn đề đó; tạo một môi trường học tập đa dạng, mà trong đó HS được sử dụng các phương tiện toán học để giải quyết tình huống nảy sinh ở các lĩnh vực khác nhau. Như vậy, có thể thấy DH MHH toán học giúp học sinh thấy nguồn gốc thực tiễn của các kiến thức toán học; biết vận dụng kiến thức toán học vào thực tiễn. Việc dạy học mô hình hóa có thể triển khai ở bất kỳ mức độ giáo dục nào từ tiểu học đến trung học và cả đại học.

Mặc dù DH MHH rất có ích trong việc tổ chức dạy học toán học ở trường phổ thông nhưng nó cũng có một số nhược điểm, hạn chế.

- Đầu tiên, DH MHH đòi hỏi mất nhiều thời gian hơn so với các phương pháp truyền thống. Khác với việc cung cấp kiến thức cho học sinh một cách thụ động, DH MHH yêu cầu người học suy luận, xây dựng bài toán toán học, giải quyết bài toán từ đó kiến thức mới được hình thành. Việc giải một bài toán thực tiễn cũng tốn nhiều thời gian hơn việc giải một bài toán toán học thuần túy. Mặt khác, số tiết môn toán trong chương trình giáo dục phổ thông năm 2018 đã giảm xuống còn 105 tiết đối với các khối 10, 11, 12 [1]. Chính vì vậy, việc DH MHH toán học không phải lúc nào cũng thực hiện được.
- Tiếp theo, trong giờ DH MHH lựa chọn các vấn đề để thảo luận trong lớp học không phải là đơn giản, trong thực tế đó là nghệ thuật của GV. Tình huống như thế nào là phù hợp, đủ cho việc giảng dạy? Điều này đòi hỏi GV phải đầu tư rất nhiều và những cái họ có trong tay phải được cập nhật và phải được điều chỉnh phù hợp cho từng lớp học, ngoài ra cũng đòi hỏi khả năng quản lý tình hình mở trong lớp học của GV. Những trở ngại từ quan điểm của học sinh cho rằng DH MHH làm cho bài học và các kì thi toán học được yêu cầu cao hơn và khó dự đoán hơn. Các học sinh không muốn thử nghiệm một phương pháp tiếp cận mới.

2.1.3. Các bước dạy học mô hình hóa toán học

Để hình thành các bước dạy học mô hình hóa toán học, trước hết chúng tôi dựa vào quá trình mô hình hóa một vấn đề của thực tiễn. Quá trình này gồm 4 giai đoạn:

Giai đoạn 1: Chuyển hệ thống ngoài toán học thành một mô hình trung gian. Xây dựng mô hình định tính của vấn đề, tức là xác định các yếu tố có ý nghĩa quan trọng nhất và xác lập những quy luật mà chúng phải tuân theo.

Giai đoạn 2: Chuyển mô hình trung gian thành mô hình toán học. Khi có mô hình trung gian ta chọn các biến đặc trưng cho các yếu tố của tình huống đang xét. Từ đó dẫn

đến việc lập mô hình toán học thiết lập mối quan hệ giữa các biến số và các tham số của tình huống.

Giai đoạn 3: Hoạt động toán học trong mô hình toán học. Sử dụng các công cụ toán học để khảo sát và giải quyết mô hình toán học hình thành ở giai đoạn 2.

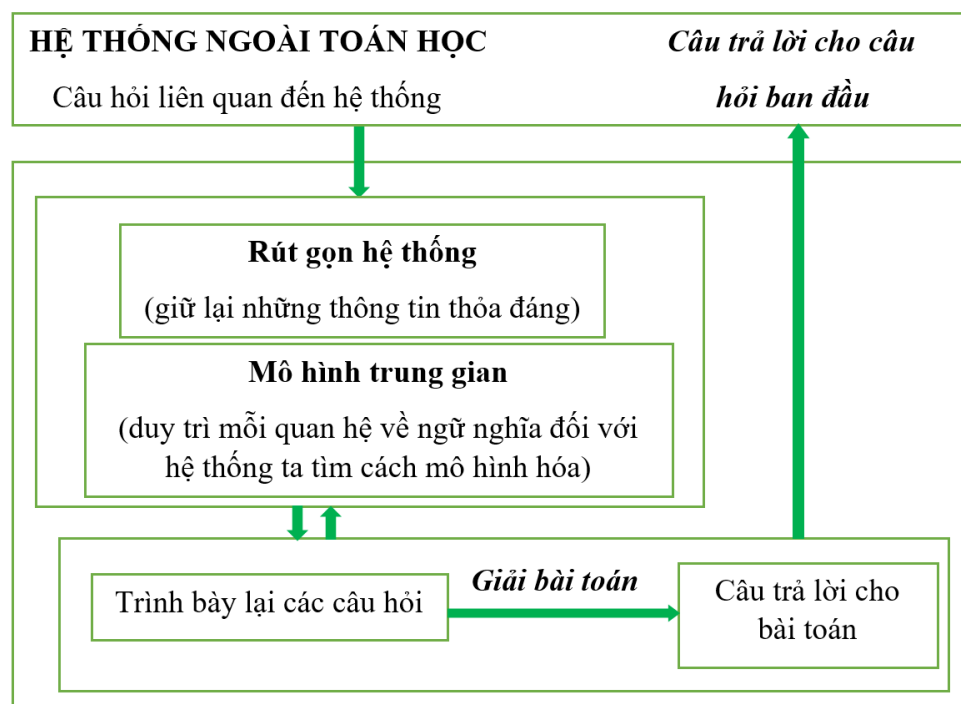
Giai đoạn 4: Phân tích và kiểm định lại các kết quả thu được trong giai đoạn 3. Trở lại tình huống được nghiên cứu để chuyển câu trả lời của vấn đề toán học thành câu trả lời của những câu hỏi ban đầu và đối chiếu chúng với thực tiễn được mô hình hóa. Trong giai đoạn này có hai khả năng:

Khả năng 1: Mô hình và các kết quả tính toán phù hợp với thực tế.

Khả năng 2: Mô hình và các kết quả tính toán không phù hợp với thực tế. Khi đó cần xem xét các nguyên nhân sau:

- + Tính chính xác của lời giải toán học, thuật toán, quy trình.
- + Mô hình định tính đã xây dựng chưa phản ánh đầy đủ vấn đề đang xét.
- + Tính thỏa đáng của mô hình toán học đang xây dựng.
- + Các số liệu ban đầu không phản ánh đúng thực tế.

Trong trường hợp này, cần phải thực hiện lại quy trình trên cho đến khi tìm được mô hình toán học thích hợp cho tình huống.



Sơ đồ mô tả quá trình mô hình hóa một vấn đề thực tiễn phỏng theo Coulange (1997) [3].

Căn cứ vào quá trình đã nêu ở trên, chúng tôi đề xuất các bước dạy học mô hình hóa toán học như sau:

Bước 1. Nêu vấn đề ngoài toán học: Đưa ra một tình huống, vấn đề ngoài toán học.

Bước 2. Xây dựng mô hình toán học:

- Xây dựng mô hình trung gian.
- Xây dựng mô hình trung gian.

Bước 3. Tìm câu trả lời cho vấn đề ngoài toán học:

- Giải bài toán toán học (giải quyết vấn đề toán học).
- Trả lời cho vấn đề ngoài toán học.

Bước 4. Thể chế hóa tri thức cần dạy: xác định, trình bày khái niệm, định lý ... sinh ra từ quá trình giải quyết vấn đề. Trong đó, thể chế hóa tri thức là việc xác định, trình bày khái niệm, định lý dựa trên 1 hệ thống học sinh đã tìm hiểu trước.

2.1.4. Điều kiện sử dụng

GV cần tìm được những tình huống vấn đề ngoài toán học, có thể đó là vấn đề thực tiễn, hoặc cũng có thể là vấn đề trong các khoa học khác. Đồng thời, việc mô hình hóa vấn đề này sẽ dẫn đến mô hình toán học dựa trên tri thức toán mà HS cần nắm đến [1].

2.2. Vận dụng dạy học mô hình hóa toán học trong dạy học bài giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

“Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số” là một nội dung trong chương trình Toán 12. Dạy học nội dung này không những giúp HS có được khối lượng tri thức, kĩ năng cần thiết về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất mà còn có nhiều cơ hội giúp các em vận dụng khối lượng tri thức, kĩ năng ấy vào học tập các môn học khác và giải thích các hiện tượng trong thực tế đời sống. Các bài tập trong sách giáo khoa, sách bài tập chủ yếu tập trung rèn luyện cho học sinh cách tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số đã biết trong một khoảng hay đoạn. GV nên cho học sinh nhiều bài tập thực tế để học sinh thấy được ý nghĩa của việc học toán. Dưới đây, chúng tôi trình bày việc vận dụng DH MHH toán học trong dạy học bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số thông qua các ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.1. [2] Một đường dây điện được nối từ nhà máy điện trên đất liền ở vị trí A đến vị trí C trên quần đảo. Khoảng cách ngắn nhất từ C đến đất liền là đoạn BC có độ dài 1 km, khoảng cách từ A đến B là 4 km. Người ta chọn một vị trí là điểm S nằm giữa A và B để mắc đường dây điện từ A đến S, rồi từ S đến C. Chi phí mỗi km dây điện trên đất liền mất 3000 USD, mỗi km dây điện đặt ngầm dưới biển mất 5000 USD. Hỏi điểm S phải cách điểm A bao nhiêu km để chi phí mắc đường dây điện là ít nhất?

Bước 1. Nêu vấn đề ngoài toán học: GV thông báo bài toán trên.

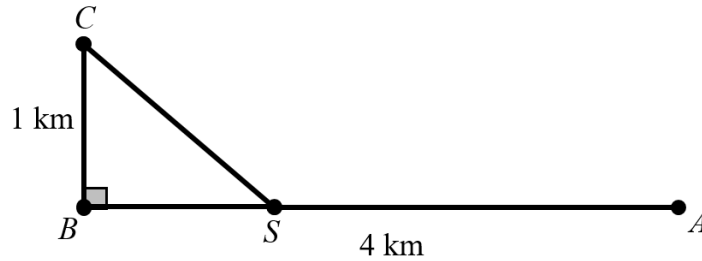
Bước 2. Xây dựng mô hình toán học:

- Xây dựng mô hình trung gian

GV tổ chức cho HS suy nghĩ và thảo luận tìm ra những yếu tố, số liệu cần thiết. HS cần tìm ra giả thiết và kết luận của bài toán.

Giả thiết: $BC = 1 \text{ km}$, $AB = 4 \text{ km}$, $S \in AB$. Chi phí mắc từ S đến A là 3000 USD, chi phí mắc từ S đến C là 5000 USD.

Kết luận: $SA = ?$ Để chi phí mắc dây điện là ít nhất?



- Xây dựng mô hình toán học

+ GV tổ chức cho học sinh thiết lập mô hình toán học của bài toán này.

+ GV hướng dẫn HS tìm ra bài toán như sau:

Giả sử $AS = x$ ($0 \leq x \leq 4$), khi đó $BS = 4 - x$. Chi phí mắc dây điện được chia làm 2 phần:

Phần 1: Chi phí mắc dây điện từ A đến S là 3000 USD/km.

Phần 2: Chi phí mắc dây điện đặt ngầm dưới biển từ S đến C là 5000 USD/km.

Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác vuông, ta thấy rằng

$$SC = \sqrt{1 + (4 - x)^2}.$$

Do đó tổng chi phí mắc dây điện:

$$f(x) = 3000x + 5000\sqrt{1 + (4 - x)^2}.$$

Bài toán đặt ra tìm x để $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0, 4]$.

Bước 3.

- Giải bài toán (giải quyết vấn đề toán học)

$$f(x) = 3000x + 5000\sqrt{1 + (4 - x)^2}.$$

Khi đó

$$f'(x) = 3000 + 5000 \frac{-(4 - x)}{\sqrt{1 + (4 - x)^2}}.$$

Từ đây, ta được

$$\begin{aligned}f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3\sqrt{1 + (4 - x)^2} = 5(4 - x) \\&\Leftrightarrow (x - 4)^2 = \frac{9}{16} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{4} \text{ (loại vì } x \in [0, 4]), \\ x = \frac{13}{4} \text{ (nhận vì } x \in [0, 4]). \end{cases}\end{aligned}$$

- Trả lời cho vấn đề ngoài toán học

Vậy $AS = 3,25$ km thì chi phí mắc dây điện là ít nhất.

Bước 4. Ở bước này, GV xác định và chỉ rõ kiến thức về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất và bài toán thực tiễn.

Ví dụ 2.2. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ có x con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ có cân nặng

$$P(n) = 480 - 20n \text{ (gam)}.$$

Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

Bước 1. Nêu vấn đề ngoài toán học: GV thông báo bài toán trên.

Bước 2. Xây dựng mô hình toán học:

- Xây dựng mô hình trung gian

GV tổ chức cho HS suy nghĩ và thảo luận tìm ra những yếu tố, số liệu cần thiết. HS cần tìm ra giả thiết và kết luận của bài toán.

Giả thiết: Có n con cá, cân nặng mỗi con cá sau vụ là $P(n) = 480 - 20n$.

Kết luận: Tìm n , để sau vụ cá thì thu hoạch được nhiều cá nhất.

- Xây dựng mô hình toán học

+ GV tổ chức cho học sinh thiết lập mô hình toán học của bài toán này.

+ GV hướng dẫn HS tìm ra bài toán như sau:

Có n là số con cá trên một đơn vị diện tích hồ ($n > 0$). Khi đó cân nặng của một con cá là

$$P(n) = 480 - 20n.$$

Do đó, cân nặng của n con cá là

$$nP(n) = 480n - 20n^2.$$

Bài toán trở thành tìm n để

$$f(n) = 480n - 20n^2$$

với $n \geq 0$ đạt giá trị lớn nhất.

Bước 3.

- Giải bài toán (giải quyết vấn đề toán học)

Ta có

$$f(n) = 480n - 20n^2.$$

Khi đó

$$f'(n) = 480 - 40n.$$

Từ đây, ta được

$$f'(n) = 0 \Leftrightarrow 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = \frac{480}{40} = 12.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x		0	12	$+\infty$
$f'(x)$			0	
$f(x)$			2880	

Từ bảng biến thiên, ta thấy rằng giá trị lớn nhất của $f(n)$ là 2880 khi $n = 12$.

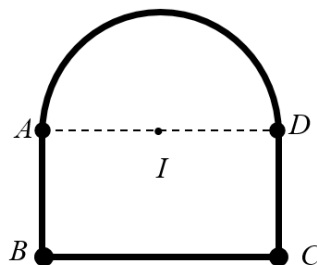
- Trả lời cho vấn đề ngoài toán học

Vậy khi thả 12 con cá thì sau vụ ta thu được khối lượng cá là lớn nhất.

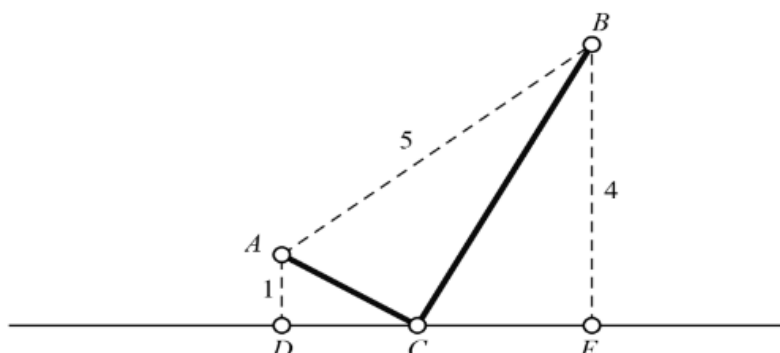
Bước 4. Ở bước này, GV xác định và chỉ rõ kiến thức về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất và bài toán thực tiễn.

Bài tập tự luyện

Bài 1. Một cửa sổ có dạng như hình vẽ, bao gồm: một hình chữ nhật ghép với nửa hình tròn có tâm nằm trên cạnh hình chữ nhật. Biết rằng chu vi cho phép của cửa sổ là 4m. Hỏi diện tích lớn nhất của cửa sổ là bao nhiêu?



Bài 2. Có hai cây cột dựng trên mặt đất lần lượt cao 1 m và 4 m, đỉnh của hai cây cột cách nhau 5 m. Người ta cần chọn một vị trí trên mặt đất (nằm giữa hai chân cột) và giăng dây nối đến hai đỉnh cột để trang trí như mô hình được mô tả bên dưới. Tính độ dài của dây ngắn nhất.



3. KẾT LUẬN

Phát triển năng lực mô hình hóa cho học sinh là một mục tiêu quan trọng trong dạy học môn Toán. Bộ GD-ĐT đã có những đổi mới bước đầu nhằm phát triển năng lực và tăng cường năng lực vận dụng kiến thức khoa học vào thực tiễn cho học sinh. Ở Việt Nam, DH MHH còn khá mới mẻ đối với giáo viên và học sinh khi dạy và học môn Toán ở trường phổ thông. Trong nghiên cứu này, chúng tôi đã hệ thống hóa được các vấn đề về lý luận DH MHH toán học gồm: khái niệm, vai trò và các bước DH MHH toán học. Từ đó vận dụng vào dạy học một số bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số.

Lời cảm ơn

Các tác giả chân thành cảm ơn TS. Đào Thị Hoa, hướng đã trực tiếp và tận tình hướng dẫn các tác giả trong quá trình viết bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Chương trình giáo dục phổ thông*, Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018.
- [2] N. B. Hoàng, *Bài toán thực tế liên quan đến Hình học*, 2013.
<https://toanmath.com/2017/02/bai-toan-thuc-te-lien-quan-den-hinh-hoc-nguyen-ba-hoang.html>.
- [3] N. D. Nam, *Phương pháp mô hình hóa trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông*, NXB Đại học Thái Nguyên, 2016.
- [4] L. V. Tiến, *Phương pháp dạy học môn Toán ở trường phổ thông*, NXB Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh, 2005.



339 ứng viên Giáo sư, Phó Giáo sư đạt đủ số phiếu tín nhiệm của Hội đồng Giáo sư Nhà nước năm 2020



Bộ trưởng Bộ GD&ĐT, Chủ tịch Hội đồng GSNN
Phùng Xuân Nhạ chủ trì phiên họp

Ngày 5.12.2020, Hội đồng Giáo sư Nhà nước (GSNN) đã tổ chức phiên họp lần thứ VI nhằm thảo luận và tiến hành bỏ phiếu đối với kết quả xét của Hội đồng Giáo sư ngành, liên ngành và danh sách ứng viên đủ điều kiện được công nhận đạt tiêu chuẩn chức danh Giáo sư, Phó Giáo sư (GS, PGS).

Kết quả, số ứng viên đạt đủ số phiếu tín nhiệm theo quy định là 339 ứng viên, trong đó 39 ứng viên GS, 300 ứng viên PGS. Tỷ lệ đạt so với tổng số ứng viên đăng ký nộp hồ sơ tại các Hội đồng GS cơ sở cho đến thời điểm này là 62,55% (trong đó tỉ lệ đạt của ứng viên GS là 50,65%, ứng viên PGS là 64,52%).

Năm 2020, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 có 02 ứng viên đạt đạt chuẩn chức danh PGS đó là: **TS. Nguyễn Văn Tuyên - Phó Trưởng khoa Toán** và **TS. Nguyễn Xuân Thành - Phó Trưởng khoa Sinh - KTNN**. Chuyên ngành xét công nhận chức danh PGS của TS. Nguyễn Văn Tuyên là Lý thuyết tối ưu và TS. Nguyễn Xuân Thành là Sinh được học.

Giảng viên và sinh viên khoa Toán nhận học bổng đào tạo từ Quỹ Đổi mới sáng tạo Vingroup (VinIF)

Ngày 23.11.2020, Quỹ Đổi mới sáng tạo Vingroup (VinIF), thuộc Tập đoàn Vingroup trao tặng 293 suất học bổng trị giá gần 40 tỉ đồng cho các học viên, nghiên cứu sinh trong các lĩnh vực Khoa học Công nghệ (KH-CN). Đây là năm thứ 2 liên tiếp, Vingroup trao học bổng thạc sĩ, tiến sĩ trong nước, nhằm góp phần phát triển nguồn nhân lực khoa học chất lượng cao cho đất nước.



Toàn cảnh buổi lễ công bố

Từ 577 hồ sơ, 293 học viên cao học và nghiên cứu sinh xuất sắc nhất đã được nhận học bổng, chuyên ngành học là các lĩnh vực mũi nhọn đang được các trường đại học, viện nghiên cứu tập trung đầu tư. Năm 2020, khoa Toán có 02 giảng viên **ThS. Hà Tuấn Dũng** và **ThS. Nguyễn Phương Đông** đã giành được học bổng Tiến sĩ trị giá 150 triệu đồng/năm cùng 02 sinh viên **Nguyễn Thị Thu Huyền** và **Đặng Minh Hiếu** đã giành được học bổng Thạc sĩ trị giá 120 triệu đồng/năm. Ngoài hỗ trợ học bổng, Quỹ VinIF còn xây dựng các chương trình Tài trợ các dự án KH-CN, Hợp tác đào tạo thạc sĩ và tài trợ cho các hội nghị, hội thảo KH-CN nhằm góp phần thúc đẩy sự phát triển của khoa học công nghệ nước nhà.



TẠP CHÍ TOÁN HỌC & SINH VIÊN

Chuyên mục “Tin tức vừa qua”

Lễ công bố Quyết định công nhận Hội đồng trường, Chủ tịch Hội đồng trường, Hiệu trưởng nhiệm kỳ 2020 - 2025

Ngày 17.12.2020, Trường ĐHSP Hà Nội 2 trang trọng tổ chức Lễ công bố Quyết định công nhận Hội đồng trường, Chủ tịch Hội đồng trường, Hiệu trưởng Trường ĐHSP Hà Nội 2, nhiệm kỳ 2020 - 2025.

Phát biểu tại buổi lễ, Thứ trưởng Nguyễn Hữu Độ thay mặt lãnh đạo Bộ GD&ĐT gửi lời chúc mừng 19 đồng chí tham gia Hội đồng trường (HĐT), chúc mừng PGS.TS Phùng Gia Thế và PGS.TS Nguyễn Quang Huy đã được tập thể lãnh đạo, cán bộ, viên chức nhà trường tín nhiệm đề xuất và Bộ GD&ĐT có quyết định công nhận các chức danh Chủ tịch HĐT và Hiệu trưởng nhiệm kỳ 2020 - 2025.



19 thành viên Hội đồng trường ra mắt



Thứ trưởng Nguyễn Hữu Độ tặng hoa chúc mừng PGS.TS Phùng Gia Thế và PGS.TS Nguyễn Quang Huy

Chủ tịch HĐT, PGS.TS Phùng Gia Thế trân trọng cảm ơn Bộ trưởng Bộ GD&ĐT, Ban cán sự Đảng Bộ GD&ĐT, Đảng ủy Khối các trường ĐH & CĐ Hà Nội đã tin tưởng giao nhiệm vụ, giữ chức vụ Chủ tịch Hội đồng trường nhiệm kỳ 2020 - 2025; hứa sẽ cùng HĐT tập trung thực hiện nhiệm vụ đổi mới quản trị ĐH, từng bước xây dựng cơ chế tự chủ ĐH hướng tới mô hình ĐH tiên tiến.

Nhận Quyết định bổ nhiệm chức danh Hiệu trưởng nhiệm kỳ 2020 - 2025, PGS.TS Nguyễn Quang Huy cảm nhận đây là vinh dự nhưng cũng là áp lực và trách nhiệm lớn đối với cá nhân. Ý thức được thuận lợi và khó khăn, PGS Nguyễn Quang Huy mong rằng tập thể cán bộ, giảng viên, sinh viên nhà trường cùng nhìn về một hướng để xây dựng nhà trường thành một môi trường giáo dục ĐH và nghiên cứu khoa học có tính chuyên nghiệp cao, một môi trường làm việc và học tập đầy trí tuệ, một môi trường bình đẳng cho mọi người trong một không gian học thuật mở và kết nối trí thức cộng đồng, để đảm bảo rằng người học sau khi tốt nghiệp có chất lượng cao, năng lực làm việc, thích nghi, sáng tạo và tự học suốt đời.

Dự án của sinh viên khoa Toán lọt Top 4 bình chọn toàn quốc tại Chung kết Cuộc thi “Học sinh, sinh viên với ý tưởng khởi nghiệp” năm 2020

Đó là dự án Connectstudy (Kết nối gia sư trực tuyến) của hai sinh viên Nguyễn Anh Cường - K45 TTA và Đặng Linh Nga - K45A SPT. Dựa vào nhu cầu tìm kiếm gia sư ngày càng cao của học sinh, Connectstudy.com cung cấp dịch vụ gia sư trực tuyến sáng tạo, tiện lợi, tiết kiệm, phù hợp với đặc điểm tâm sinh lý học sinh Việt Nam, tạo không gian tương tác mạnh mẽ giữa phụ huynh - học sinh, gia sư và đội ngũ quản trị website. Đội ngũ giảng dạy và cộng tác viên hỗ trợ sau giờ học chuyên nghiệp. Connectstudy.com hứa hẹn sẽ là một dự án chuyên nghiệp, uy tín, chất lượng, luôn luôn đổi mới để phát triển, có một tiền đề tốt để đạt được sứ mạng “Kết nối khơi nguồn tri thức”.



Phó Thủ tướng Chính phủ Vũ Đức Đam thăm gian hàng trưng bày dự án của Đặng Linh Nga và Nguyễn Anh Cường