TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
KHOA TOÁN

LƯU THỊ SONG

VỀ CÁC ĐỊNH LÝ MONTEL,KÖBE, ÁNH XẠ RIEMANN TRONG GIẢI TÍCH PHỨC MỘT BIẾN

LUẬN VĂN THẠC SĨ
NGÀNH: TOÁN GIẢI TÍCH

Thái Nguyên, năm 2019

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
KHOA TOÁN

LƯU THỊ SONG

VỀ CÁC ĐỊNH LÝ MONTEL,KÖBE, ÁNH XẠ RIEMANN TRONG GIẢI TÍCH PHỨC MỘT BIẾN

LUẬN VĂN THẠC SĨ
NGÀNH: TOÁN GIẢI TÍCH

Người hướng dẫn khoa học
PGS. TSKH. TRẦN VĂN TẤN

Thái Nguyên, năm 2019

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS. TSKH. Trần Văn Tấn, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đến thầy! Dù bận nhiều công việc nhưng thầy vẫn dành thời gian hướng dẫn và giải đáp mọi vấn đề một cách rõ ràng cho tôi. Xin chân thành cảm ơn thầy vì đã tin tưởng và hết lòng giúp đỡ tôi trong thời gian khó khăn vừa qua.

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại khoa Toán thuộc trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, xin gửi lời cảm ơn chân thành tới các thầy cô giáo Khoa Toán - trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, nhất là các thầy cô trong tổ giải tích, các thầy cô luôn nhiệt tình giảng dạy và tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập, để tôi hoàn thành luận văn của mình.

Do thời gian và khả năng của bản thân còn hạn chế nên luận văn của tôi không tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của các thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Mục lục

Mở đầu **1**

Chương 1 Định lí ánh xạ Riemann **2**

1.1 Định lý Arzela - Ascoli 2

1.2 Định lý Montel 4

1.3 Miền đơn liên 5

1.4 Định lý ánh xạ Riemann 6

1.5 Định lí Köbe 10

Chương 2 Tiêu chuẩn Montel về họ chuẩn tắc các hàm phân hình **13**

2.1 Các định lí cơ bản thứ nhất và thứ hai trong Lý thuyết Nevanlinna 13

2.2 Tiêu chuẩn họ chuẩn tắc kiểu Montel 14

Kết luận **28**

Tài liệu tham khảo **29**

Mở đầu

1. Lí do chọn đề tài

Các định lí Montel, Köbe về tính chuẩn tắc, Định lí ánh xạ Riemann là những kết quả đẹp đẽ và quan trọng trong Giải tích phức một biến và liên tục thu hút được sự quan tâm của các nhà toán học. Với mong muốn tìm hiểu chủ đề quan trọng này nên chúng tôi đã chọn đề tài này.

2. Cấu trúc luận văn

Luân văn được chia làm hai chương: Ở Chương 1, luận văn trình bày về Định lí ánh xạ Riemann về sự tồn tại song ánh chỉnh hình giữa một miền đơn liên (khác toàn thể) trong $\mathbb{C}$ với đĩa đơn vị. Để trình bày vấn đề này, chúng tôi tham khảo các tài liệu [1, 2]. Chương 2 đề cập tới một số tiêu chuẩn chuẩn tắc kiểu Montel. Chúng tôi tham khảo [4] để cập nhật một số kết quả gần đây về sự mở rộng Định lí Montel.

Thái Nguyên, ngày 27 tháng 1 năm 2019

Tác giả

LƯU THỊ SONG

Chương 1

Định lí ánh xạ Riemann

1.1 Định lý Arzela - Ascoli

Cho X là một không gian metric và $\mathcal{F}$ là một họ các hàm trên X, liên tục và nhận giá trị phức.
Họ $\mathcal{F}$ được gọi là liên tục đều trên tập con $Y \subset X$ nếu với mỗi $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $p, q \in Y$ và mọi $f \in \mathcal{F}$ thỏa mãn $d_X(p, q) < \delta$, thì $|f(p) - f(q)| < \epsilon$.
Họ $\mathcal{F}$ được gọi là chuẩn tắc trên tập con $Y \subset X$ nếu với mỗi dãy $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, tồn tại một dãy con $\{f_{n_j}\}$ hội tụ đều trên mỗi tập con compact của Y.

Nhắc lại rằng một không gian mêtric X được gọi là tách được nếu tồn tại tập con đếm được $\{p_j\} \subset X$ là trù mật.

Định lý 1.1. *(Arzela - Ascoli) Cho X là một không gian mêtric tách được. Giả sử có tập con compact $K_n \subset X$ sao cho $K_n \subset K_{n+1}$, và $\bigcup_n K_n = X$. Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm trên X, liên tục, nhận giá trị phức. Khi đó, $\mathcal{F}$ là chuẩn tắc nếu và chỉ nếu:*
(i) Họ $\mathcal{F}$ là liên tục đều trên mỗi tập con compact của X.
(ii) Với bất kì $p \in X$, tồn tại hằng số $C_p > 0$ sao cho $|f(p)| \leq C_p$ với mọi $f \in \mathcal{F}$.

Chứng minh. 1. Điều kiện cần:

Để làm rõ điều kiện cần của (i), chúng ta sẽ dùng phản chứng. Giả sử $\mathcal{F}$ là một họ chuẩn tắc, và $\mathcal{F}$ không liên đều trên tập con compact $K \subset X$. Khi đó, tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho với mỗi n, ta có các điểm $p_n, q_n \in K$ và một hàm $f_n \in \mathcal{F}$ sao cho $d_X(p_n, q_n) < \dfrac{1}{n}$ và $|f_n(p_n) - f_n(q_n)| \geq \epsilon$. Do $\mathcal{F}$ là chuẩn tắc, tồn tại một dãy con f_{n_j} mà hội tụ đều trên K đến giới hạn f_0, thì phải liên tục. Chúng ta có thể chọn dãy con xa hơn (mà ta lại gọi dãy $\{n_j\}$ với $p_{n_j} \to p_0$ và $q_{n_j} \to q_0$. Nhưng từ $d_X(p_{n_j}, q_{n_j}) < n_j^{-1} \to 0$, kéo theo $p_0 = q_0$. Tuy nhiên, từ f_0 liên tục

$$\epsilon \leq \limsup_{j \to \infty} |f_{n_j}(p_{n_j}) - f_{n_j}(q_{n_j})| = |f_0(p_0) - f_0(q_0)| = 0,$$

dẫn đến điều mâu thuẫn.

Để chỉ ra điều kiện cần của (ii), ta giả sử tồn tại $p \in X$ sao cho tập các giá trị $\{f(p)\}$ với $f \in \mathcal{F}$ là không bị chặn. Khi đó, với mỗi n tồn tại một hàm $f_n \in \mathcal{F}$ với $|f_n(p)| > n$. Điều này mẫu thuẫn với giả thiết tồn tại một dãy con $\{f_{n_j}\}$ hội tụ trên tập (compact) $\{p\} \subset X$. Điều kiện cần của (i) và (ii) đã được chứng minh.

2. Điều kiện đủ.

Bây giờ, ta giả sử rằng họ $\mathcal{F}$ thỏa mãn (i) và (ii). Xét $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ là một dãy trong $\mathcal{F}$. Gọi $\{p_n\}$ là một dãy trù mật trong X.
Do các giá trị $\{f_n(p_1)\}$ nằm trong tập compact $\{\zeta \in \mathbb{C} | |\zeta| \leq C_{p_1}\}$, ta có thể tìm dãy con thứ nhất $n_{1,1} < n_{1,2} < ... < n_{1,k} < ...$ sao cho dãy $\{f_{n_{1,k}}(p_1)\}$ hội tụ, gọi giá trị giới hạn là $f_0(p_1)$. Tiếp theo, từ tập các giá trị $\{f_{n_{1,k}}(p_2)\}$ chứa trong tập compact $\{\zeta \in \mathcal{C} | |\zeta| \leq C_{p_2}\}$, chúng ta có thể tìm dãy thứ hai $n_{2,1} < n_{2,2} < ... < n_{2,k} < ...$ sao cho dãy $\{f_{n_{2,k}}\}$ (gọi giá trị giới hạn là $f_0(p_2)$), và dãy thứ hai chứa trong dãy thứ nhất. Tương tự, chúng ta có thể tìm thấy vô hạn các dãy của dãy con

$$\begin{array}{cccc}
n_{1,1} < & n_{1,2} < & \cdots & < n_{1,k} < \cdots \\
n_{2,1} < & n_{2,2} < & \cdots & < n_{2,k} < \cdots \\
n_{3,1} < & n_{3,2} < & \cdots & < n_{3,k} < \cdots \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
n_{j,1} < & n_{j,2} < & \cdots & < n_{j,k} < ... \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots
\end{array}$$

sao cho

(i) Tồn tại giới hạn của dãy $\{f_{n_{j,k}}(p_j)\}$ (gọi giá trị giới hạn là $f_0(p_j)$);

(ii) Với mỗi dãy con $\{n_{j,k}\}$ là tập con của dãy con trước $\{n_{j-1,k}\}$

Từ đó, với bất kỳ j cố định, phần tử của dãy đường chéo $\{n_{\ell,\ell}\}$ chứa trong dãy $\{n_{j,k}\}$ với $\ell \geq j$. Do đó, với dãy con các hàm $\{F_\ell = f_{n_{\ell,\ell}}\}$, ta có $\lim_{\ell\to\infty} F_\ell(p_j) = f_0(p_j)$ với mọi j.

Ta sẽ chứng minh rằng $\{F_\ell\}$ hội tụ đều trên bất kỳ tập con compact $K \subset X$. Do dãy là liên tục đều trên K, với bất kỳ $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $d(p,q) < \delta$ bao hàm $|F_\ell(p) - F_\ell(q)| < \epsilon$. Bây giờ, $K \subset \bigcup_{q\in K} B_X(q,\delta)$, và vì K là compact, tồn tại tập hữu hạn $\{q_1, ..., q_N\}$ sao cho $K \subset \bigcup_{J=1}^{N} B_X(q_j,\delta)$. Vì $\lim_{\ell\to\infty} F_\ell(p_{j_r}) = f_0(p_{j_r})$, và khi đó, ta chỉ cần xử lý trên tập hợp hữu hạn điểm, ta có thể tìm được M sao cho $\ell_1, \ell_2 \geq M$ bao hàm $|F_{\ell_1}(p_{j_r}) - F_{\ell_2}(p_{j_r})| < \epsilon$.

Bây giờ, lấy $p \in K$. Khi đó, $p \in B_X(p_j,\delta)$ với mọi j_r. Ta có

$$\begin{aligned}|F_{\ell_1}(p) - F_{\ell_2}(p)| &\leq |F_{\ell_1}(p) - F_{\ell_1}(p_{j_r})| + |F_{\ell_1}(p_{j_r}) - F_{\ell_2}(p_{j_r})| \\ &\quad + |F_{\ell_2}(p_{j_r}) - F_{\ell_2}(p)| \\ &\leq \epsilon + \epsilon + \epsilon.\end{aligned}$$

Điều này chỉ ra được dãy $\{F_\ell\}$ là Cauchy đều trong cận trên đúng của chuẩn trên K, và do đó dãy hội tụ đều trên K. Định lý được chứng minh. □

1.2 Định lý Montel

Tiêu chuẩn Montel được phát biểu sau đây cho phép ta kiểm tra tính chuẩn tắc của một họ thông qua tính bị chặn đều trên các tập con compact.

Định lý 1.2. *(Montel) Cho $\Omega \subset \mathbb{C}$ là một miền, và $\mathcal{F}$ là một họ các hàm chỉnh hình trên Ω. Giả sử với mỗi tập con compact $K \subset \Omega$, tồn tại hằng số $C_K > 0$ sao cho $|f(z)| \leq C_k$ với mỗi $f \in \mathcal{F}$ và mọi $z \in K$. Khi đó, họ $\mathcal{F}$ là chuẩn tắc trên Ω .*

Chứng minh. Theo Định lý Arzela - Ascoli, ta chỉ cần chứng minh rằng họ $\mathcal{F}$ là liên tục đều trên mỗi tập con compact $K \subset \Omega$. Do vậy, có thể đẩy vấn đề về việc chứng minh rằng nếu một họ các hàm chỉnh hình trên một đĩa bán kính R bởi M thì nó là liên tục đều trên mỗi hình tròn nằm trong miền xác định.

Lấy $r < R$, và chọn ρ với $r < \rho < R$. Nếu f là hàm chỉnh hình trên đĩa $D(a, R)$ và có mô-đun bị chặn bởi M, và nếu $z, \omega \in D(a, r)$, thì

$$\begin{aligned}|f(z) - f(\omega)| &= \Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-\omega}d\zeta\Big| \\ &= \Big|\frac{z-\omega}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-\omega)}d\zeta\Big| \\ &\leq |z-\omega|M\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho dt}{|\rho e^{it}+a-z||\rho e^{it}+a-\omega|} \\ &\leq |z-\omega|\frac{M\rho}{(\rho-r)^2}.\end{aligned}$$

Như vây, ta nhận được kết luận của Định lý. □

1.3 Miền đơn liên

Định nghĩa 1.1. Một không gian tôpô X được gọi là đơn liên nếu với mỗi hàm liên tục $\gamma : [0, 1] \to X$ với $\gamma(0) = \gamma(1)$ luôn tồn tại một ánh xạ liên tục $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ sao cho

(1) $\Gamma(t, 0) = \gamma(t)$ với $0 \leq t \leq 1$;

(2) $\Gamma(0, s) = \Gamma(1, s) = \Gamma(0, 0)$ với $0 \leq s \leq 1$;

(3) $\Gamma(t, 1) = \Gamma(0, 1) = \Gamma(1, 1)$ với $0 \leq t \leq 1$.

Nói cách khác, X là đơn liên nếu và chỉ nếu mỗi ánh xạ liên tục từ hình tròn vào X, đi qua một điểm $x_0 \in X$ có thể biến đổi một cách liên tục đến ánh xạ hằng có ảnh là $\{x_0\}$.

Liên quan tới định lí ánh xạ Riemann, ta chỉ đề cập ở đây tới miền đơn liên trong $\mathbb{C}$.

Mệnh đề 1.1. Một tập mở liên thông Ω trong $\mathbb{C}$ là đơn liên nếu và chỉ nếu phần bù của nó trong hình cầu Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ có nhiều nhất một thành phần liên thông.

Điều kiện tôpô của miền đơn liên dẫn đến hệ quả trong giải tích sau:

Mệnh đề 1.2. Cho $\Omega \subset \mathbb{C}$ là một miền đơn liên. Nếu f là chỉnh hình trên Ω và $f(z) \neq 0$ với mọi $z \in \Omega$, thì khi đó tồn tại một nhánh chỉnh hình của $\log f$ xác định trên Ω, có nghĩa, tồn tại một hàm chỉnh hình g dịnh nghĩa trên Ω sao cho $f(z) = exp(g(z))$ với mọi $z \in \Omega$. Đặc biệt, nếu n là một số nguyên dương bất kì, hàm $h_n(z) = exp[\frac{1}{n}g(z)]$ là chỉnh hình và thỏa mãn $h_n(z)^n = f(z)$ với mọi $z \in \Omega$.

1.4 Định lý ánh xạ Riemann

Mệnh đề 1.3. Giả sử $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ là ánh xạ song chỉnh hình của hình tròn đơn vị sao cho $F(0) = 0$, và $F'(0) > 0$. Khi đó, $F(z) = z$ với mọi $z \in \mathbb{D}$.

Chứng minh. Lấy G là ánh xạ ngược của F, $F(G(z)) = z$ và $G(F(\omega)) = \omega$ với mọi $z, \omega \in \mathbb{D}$. Khi đó, $F'(G(z))G'(z) = 1$, và $F'(0)G'(0) = 1$. Mặt khác, $|F(z)| < 1, |G(z)| < 1$ với mọi $z \in \mathbb{D}$, và $F(0) = G(0) = 0$ nên điều này suy ra từ bổ đề Schwarz là $|F'(0)| \leq 1$ và $|G'(0)| \leq 1$. Do đó, ta có $|F'(0)| = 1$ và lại bởi bổ đề Shwarz $F(z) = e^{i\theta}z$. Nhưng từ $F'(0) > 0$ chúng ta phải có $\theta = 0$, và do đó $F(z) = z$. □

Mệnh đề 1.4. Lấy $a \in \mathbb{C}$ với $|a| < 1$, và định nghĩa

$$\phi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}.$$

Khi đó biến đổi phân tuyến tính ϕ_a có các tính chất sau:
(i) $\phi_a(0) = a$ và $\phi_a(a) = 0$;
(ii) $\phi_a \circ \phi_a(z) = z$;
(iii) $\phi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ là ánh xạ song chỉnh hình.

Chứng minh. Phát biểu (i) và (ii) là những phép toán đơn giản. Như chúng ta đã biết, mỗi phép biến đổi tuyến tính phân số là là ánh xạ một đối một của hình cầu Rieman vào chính nó. Nếu ta có thể chỉ ra rằng ϕ_a mang hình tròn đơn vị vào chính nó, sẽ kéo theo phát biểu (iii).

Nhưng nếu $|z| = 1$ thì

$$|\phi_a(z)|^2 = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}\frac{\overline{a-z}}{1-\overline{a}z} = \frac{|a|^2 - \overline{a}z - a\overline{z} + |z|^2}{1 - \overline{a}z - a\overline{z} + |a|^2|z|^2}$$
$$= \frac{|a|^2 - \overline{a}z - a\overline{z} + 1}{1 - \overline{a}z - a\overline{z} + |a|^2} = 1,$$

và do đó $|\phi_a(z)| = 1$, mệnh đề được chứng minh. $\square$

Để ý rằng ta cũng có điều ngược lại: Mọi đẳng cấu chỉnh hình $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ đều có dạng $f(z) = \frac{e^{i\theta}(z-\omega)}{1-\overline{\omega}z}$, với ω nào đó thuộc $\mathbb{D}$. Thật vậy, xét $g(z) = \frac{(z-\omega)}{1-\overline{\omega}z}$, với $\omega = f^{-1}(0)$. Khi đó, $g(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ và do đó g là một tự đẳng cấu chỉnh hình của $\mathbb{D}$. Do $g(\omega) = 0$ và $f(\omega) = 0$ nên $f \circ g^{-1}(0) = 0$. Mặt khác $f \circ g^{-1}$ là một tự đẳng cấu chỉnh hình của $\mathbb{D}$, nên theo Bổ đề Schwarz, $f \circ g^{-1}(z) = e^{i\theta}z$ với θ nào đó thuộc $[0, 2\pi)$. Do đó $f(z) = f \circ g^{-1}(g(z)) = e^{i\theta}g(z) = e^{i\theta}\frac{(z-\omega)}{1-\overline{\omega}z}$.

Định lý 1.3. *(Định lý ánh xạ Rieman) Cho Ω là tập con thật sự của C là một miền đơn liên. Khi đó, với mỗi $z_0 \in \Omega$, tồn tại duy nhất ánh xạ song chỉnh hình $F : \Omega \to \mathbb{D}$, giữa Ω và hình tròn đơn vị mở $\mathbb{D}$, sao cho $F(z_0) = 0$ và $F'(z_0) > 0$.*

Tính duy nhất được suy ra theo Mệnh đề 1.3. Thật vậy, nếu F_1 và F_2 là hai ánh xạ song chỉnh hình từ Ω đến $\mathbb{D}$ khi z_0 đến 0, sau đó $F_2 \circ F_1^{-1}$ là ánh xạ song chỉnh hình của hình tròn đơn vị biến 0 thành 0.

Gọi $\mathcal{F}$ là tập tất cả các đơn ánh chỉnh hình f từ Ω vào $\mathbb{D}$, thỏa mãn $f(z_0) = 0$ và $f'(z_0) > 0$. Ta chứng minh sự tồn tại song ánh chỉnh hình theo ba bước.

Bước 1: Tập hợp $\mathcal{F}$ là không rỗng.

Chứng minh. Vì Ω không phải toàn bộ mặt phẳng phức, tồn tại $a \in \mathbb{C}\ \Omega$. Thì hàm $z - a$ là chỉnh hình và không bao giờ không trên Ω, và do Ω là liên thông phạm vi, nên tồn tại một hàm chỉnh hình g trên Ω sao cho $g(z)^2 = z - a$. Hàm g sẽ có những tính chất sau:

(i) g là một đổi một. Thật vậy, nếu $g(z_1) = g(z_2)$, thì $z_1 - a = g(z_1)^2 = g(z_2)^2 = z_2 - a$, và $z_1 = z_2$.

(ii) Ảnh của g không chứa bất kỳ cặp điểm $\{\omega, -\omega\}$. Thật vậy, nếu $g_1(z) = -g_2(z)$, thì $z_1 - a = g(z_1)^2 = (-g(z_2))^2 = g(z_2)^2 = z_2 - a$, và vì thế $z_2 = z_2$, mà $g(z_1) - g(z_1)$. Bao hàm $g(z_1) = 0$, và do đó $z_1 = a$ điều đó không thể được.

(iii) Ảnh của g chứa một số hình tròn đóng $\{\omega \in \mathbb{C}| \quad |\omega - g(z_0)| \leq \delta\}$ ở đó $\delta > 0$. Từ (ii) và (iii) khoảng biến thiên của hàm g không chứa điểm bất kỳ trong hình tròn đóng trung tâm $at - g(z_0)$ của bán kính δ. Do đó, với mỗi $z \in \Omega$ ta có

$$|g(z) + g(z_0)| > \delta$$

. Đặt

$$h(z) =: \frac{\delta}{g(z) + g(z_0)}$$

Thì

(a) h là chỉnh hình trên Ω;

(b) Với mọi $z \in \Omega$, ta có $|h(z)| < 1$;

(c) Từ ánh xạ $\omega \to \delta(\omega + g(z_0))^{-1}$ là một đối một, h là một đối một (d) $h(z_0) = \delta(2g(z_0))^{-1} = a \in \mathbb{D}$

Chúng ta có $h : \Omega \to \mathbb{D}$ là chỉnh hình và một đối một. Bây giờ, ta chỉ ra hàm h với biến đổi tuyến tính phân số ϕ_a và định nghĩa

$$F(z) =: \phi_a \circ h(z) = \frac{a - h(z)}{1 + \bar{a}h(z)}.$$

Thì $F(z_0) = \phi_a(a) = 0$. Nếu ta nhân F với hằng số thích hợp của giá trị tuyệt đối 1, ta có thể đảm bảo đạo hàm ở không là dương. Do đó $\mathcal{F} \neq 0$. □

Bước 2: Tồn tại $F \in \mathcal{F}$ sao cho $F'(z_0) = \sup_{f \in \mathcal{F}} f'(z_0)$.

Chứng minh. Lấy $A = \sup_{f \in \mathcal{F}} f(z_0)$. sao cho $A \in (0, +\infty]$. Chọn một dãy $\{f_n\}$ trong $\mathcal{F}$ sao cho $\lim_{n \to \infty} f_n'(z_0) = A$. Do họ $\mathcal{F}$ bị chặn đều trên Ω, nó chuẩn tắc, và do đó có dãy con $\{f_{n_k}\}$ hội tụ đều trên tập con compact của Ω đến giới hạn F. Từ đó F là giới hạn đều của hàm chỉnh hình, F cũng chỉnh hình. Ta có, $F(z_0) = \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(z_0) = 0$ và $F'(z_0) = \lim_{k \to \infty} f_{n_k}'(z_0) = A$. (Suy ra rằng $A < +\infty$). Tương tự, nếu $z \in \Omega$, $|F(z)| = \lim_{k \to \infty} |f_{n_k}(z)| \leq 1$. Nhưng có thể suy ra từ định lý Mô đun cực đại, ta có $|F(z)| < 1$ với mọi $z \in \Omega$.

Còn lại, để chỉ ra rằng F là một đối một. Giả sử $F(z_1) = F(z_2) = \omega$. Hàm $\{f_{n_k}(z) - \omega\}$ hội tụ đều trên Ω tới hàm $F(z) - \omega$, với giả sử có hai

Không. Suy ra, với k đủ lớn, f_{n_k} cũng có Không gần z_1 và z_2, bao hàm $z_1 = z_2$. Do đó, $F \in \mathcal{F}$. $\square$

Bước 3: F là toàn ánh $\mathbb{D}$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $a \in \mathbb{D}$ sao cho $F(z) \neq a$ với mọi $z \in \Omega$. Thì hàm $z \to \phi_a \circ F(z)$ là một đối một, các ánh xạ Ω tới $\mathbb{D}$, không bao giờ Không và $\phi_a \circ F(z_0) = a$. Do Ω là liên thông phạm vi, tồn tại một hàm g, được định nghĩa và chỉnh hình trên Ω, sao cho $g(z)^2 = \phi_a \circ F(z)$. Thì $g : \Omega \to \mathbb{D}$, và khi chứng minh bước 1, suy ra được là g là một đối một. Hơn nữa, $g(z_0) = b$ với $b^2 = a$.

Nếu ta đặt $S(\omega) = \omega^2$, chúng ta dựng một hàm chỉnh hình g trên Ω sao cho $S \circ g = \phi_a \circ F$. Đặt $G = \phi_b \circ g$.. Khi đó, G là một đối một, các ánh xạ Ω tới $\mathbb{D}$, và thỏa mãn $G(z_0) = 0$. Ta có thể viết $g = \phi_b^{-1} \circ G = \phi_b \circ G$, và ta có

$$\phi_a \circ F = S \circ g = S \circ \phi_b \circ G,$$

hoặc cuối cùng

$$F = \phi_a^{-1} \circ D \circ G = \phi_a \circ S \circ \phi_b \circ G.$$

Suy ra

$$F'(0) = [\phi_a \circ S \circ \phi_b]'(0)G'(0).$$

Còn lại để tính toán $[\phi_a \circ S \circ \phi_b]'(0) = \phi_a'(a)S'(b)\phi_b'(0)$ và chỉ ra được giá trị tuyệt đối ngặt và nhỏ hơn 1. Ta được

$$\phi_a'(z)\frac{(1-\overline{a}z)(-1)-(a-z)(-\overline{a})}{(1-\overline{a}z)^2} = \frac{-1+\overline{a}z+|a|^2-\overline{a}z}{(1-\overline{a}z)^2} = -\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}.$$

Do đó

$$\phi_a'(a) = \frac{-1}{1-|a|^2} = \frac{-1}{1-|b|^4}, \qquad \phi_b'(0) = 1-|b|^2, \qquad S'(b) = 2b$$

và

$$\phi_a'(a)S'(b)\phi_b'(0) = -\frac{2b}{1+|b|^2}$$

có giá trị tuyệt đối ngặt ít hơn 1. Nên $|F'(z_0)| < |G'(z_0)|$, phủ định tối đại của $F'(z_0)$. Định lý được chứng minh. $\square$

1.5 Định lí Köbe

Định lý 1.4. *(Köbe) Gọi $\mathscr{S}$ là tập tất cả các đơn ánh chỉnh hình f trên đĩa đơn vị $\mathbb{D}$ sao cho $f(0) = 0$ và $f'(0) = 1$. Khi đó, $\mathscr{S}$ là một họ chuẩn tắc.*

Chứng minh. Cố định dãy $\{f_n\} \subset \mathscr{S}$ và đặt

$$R_n := \sup\{R > 0; \mathbb{D}(0, R) \subset f_n(\mathbb{D})\}$$

Do $f_n^{-1}|_{\mathbb{D}(0,R)} : \mathbb{D}(0, R) \longrightarrow \mathbb{D}$ là chỉnh hình với bất kì đĩa $\mathbb{D}(0, R) \subset f(\mathbb{D})$, nên theo Bổ đề Schwarz ta có, $R_n \leq 1$. Chọn một điểm $x_n \in \partial\mathbb{D}(0, R_n) - f_n(\mathbb{D})$ và đặt $g_n := f_n/x_n$. Ta có $\mathbb{D} \subset g_n(\mathbb{D}) \notin 1$.
Do $g_n(\mathbb{D})$ c là đơn liên, nên có một nhánh chỉnh hình ψ của $\sqrt{z-1}$ sao cho $\psi(0) = \sqrt{-1}$. Từ đó, $h_n := \psi \circ g_n$ thỏa mãn $h_n^2 = g_n - 1$.
Ta sẽ chỉ ra rằng $h_n(\mathbb{D}) \cap (-h_n(\mathbb{D})) = \varnothing$. Thật vậy, nếu $\omega = h_n(z)$ và $-\omega = (h_n(z'))$, thì $g_n(-\omega) = g_n(\omega)$ và phép nội xạ $\omega = -\omega = 0$. Nhưng ta lại có $g_n(z) = 1$ nên dẫn đến vô lý.
Từ $\mathbb{D} \subset g_n(\mathbb{D})$, chúng ta có $U := \psi(\mathbb{D}) \subset h_n(\mathbb{D})$, và do đó $(-U) \cap h_n(\mathbb{D}) = \varnothing$. Do đó, h_n là một dãy con hội tụ. Do đó, từ $|x_n| = R_n \leq 1$, $f_n = x_n(1+h_n^2)$ cũng là một dãy con hội tụ. Gọi f là giới hạn của dãy con này.

Đặt $a \in f(\mathbb{D})$. Từ nguyên lý argument cho bất kỳ z với $f(z) \neq a$,

$$\ell := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{|z|=r} \frac{f'(z)dz}{f(z) - a}$$

là số nguyên, rõ ràng là ≤ 1 cho r đầy đủ gần đến 1. Từ đó f_{n_k} tuỳ ý đóng để f trên $|z| \leq r$, phép nội xạ của bao hàm f_{n_k}

$$1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z|=r} \frac{f'_{n_k}(z)dz}{f_{n_k}(z) - a} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)dz}{f(z) - a} = l$$

Từ đó, f là nội xạ, và định lý được chứng minh. □

Nhận xét 1.5. Với mỗi $f \in \mathscr{S}$, ta có $f(\mathbb{D})$ chứa một hình tròn có tâm tại gốc tọa độ. Do họ $\mathscr{S}$ là chuẩn tắc, ta có thể lấy các bán kính của các hình tròn ứng với mỗi $f \in \mathscr{S}$ sao cho chúng có chặn dưới dương. Trong nhiều ứng dụng, việc các bán kính có chặn dưới dương là đủ. Tuy vậy, Köbe giả thuyết rằng chặn dưới tốt nhất có thể là 1/4 (được chứng minh bởi Bieberbach). Để kiểm tra tính tốt nhất của chặn dưới nói trên, ta có thể xét hàm

$$f(z) = \frac{1}{4}\Big(1 - \big(\frac{z-1}{z+1}\big)^2\Big).$$

Bây giờ ta xét một hàm $f \in \mathscr{S}$, và giả sử, $\omega \in \mathbb{C} - f(\mathbb{D})$. Khi đó, ta được

$$g(z) := \frac{\omega f(z)}{\omega - f(z)},$$

$g \in \mathscr{S}$. Chú ý rằng $g(0) = 0, g'(0) = 1$, và $g"(0) = g"(0) + 2\omega^{-1}$. Do $\mathscr{S}$ là chuẩn tắc, ta có

$$D_2 := \sup\{|f"(0)|; f \in \mathscr{S}\}$$

là một tập hữu hạn. Do đó, ta có đánh giá

$$D_2 \geq |g"(0)| \geq 2|\omega|^{-1} - |f"(0)| \geq 2|\omega|^{-1} - D_2,$$

vì thế ta được $|\omega| \geq D_2^{-1}$.

Dễ thấy rằng, nếu $f \in \mathscr{S}$ khi đó hàm

$$\widehat{f}(z) = (f(z^{-1}))^{-1} \quad \text{và} \quad \widetilde{f}(z) := \frac{1}{\sqrt{f(z^{-2})}},$$

trong đó chúng ta lấy nhánh của $\sqrt{}$ gửi -1 đến $\sqrt{-1}$, đều là nội xạ trên phần bù của hình tròn đơn vị và chuỗi Lôrăng có dạng

$$z + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ... \tag{1.1}$$

Đặt kí hiệu $\sum$ tập hợp các xạ ảnh đơn trị của $\mathbb{C} - \mathbb{D}$ chuỗi Laurent có dạng. Với bất kỳ $g \in \sum$ và bất kỳ $r > 1$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \text{Diện tích phần trong}(g(\partial\mathbb{D}(0,r))) &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \int_{g(\partial\mathbb{D}(0,r))} \overline{\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \int_{|z|=r} \overline{g(z)} g'(z) dz. \end{aligned}$$

Độc giả có thể kiểm tra,

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_{|z|=r}\overline{g(z)}g'(z)dz=\pi\Big(1-\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2\Big).$$

Do đó, chúng ta thấy $|b_1|\leq 1$.

Cuối cùng, người đọc có thể kiểm tra được $\widetilde{f}(z)=z-\dfrac{f"(0)}{4}z^{-1}+...$ biên của $|b_1|$ trên $\sum$ chỉ ra được $D_2\leq 4$.

Do đó, chúng ta thu được kết quả sau đây.

Định lý 1.6. *(Định lý Köbe $\frac{1}{4}$) Với mọi $f\in\mathscr{S}$, ta có $f(\mathbb{D})\supset\mathbb{D}(0,\frac{1}{4})$. Số $\frac{1}{4}$ là tốt nhất cho độ lớn bán kính đường tròn thỏa mãn yêu cầu trên.*

Chương 2

Tiêu chuẩn Montel về họ chuẩn tắc các hàm phân hình

2.1 Các định lí cơ bản thứ nhất và thứ hai trong Lý thuyết Nevanlinna

Để chuẩn bị cho việc nghiên cứu các tiêu chuẩn về họ chuẩn tắc kiểu Montel, ở phần này, chúng ta đề cập tới một số khái niệm và kết quả cơ bản của Lí thuyết Nevanlinna về sự phân bố giá trị của hàm phân hình. Cho ν là một divisor trên $\mathbb{C}$. Hàm đếm ứng với ν được định nghĩa bởi

$$N(r,\nu) = \int_1^r \frac{n(t)}{t}dt \quad (r > 1), \text{ where } n(t) = \sum_{|z|\leq t} \nu(z).$$

Với hàm phân hình f trên $\mathbb{C}$, $f \not\equiv \infty$, ta kí hiệu ν_f là divisor các không điểm của f, và $\overline{\nu}_f$ được xác định bởi $\overline{\nu}_f(z) := \min\{\nu_f(z), 1\}$. Đặt $N_f(r) := N(r,\nu_f)$ và $\overline{N}_f(r) := N(r,\overline{\nu}_f)$.

Hàm xấp xỉ của f được định nghĩa bởi

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta,$$

với $\log^+ x = \max\{\log x, 0\} \quad$ for $x \geq 0$.

Hàm đặc trưng của f được định nghĩa bởi

$$T(r,f) := m(r,f) + N(r,f).$$

Bổ đề đạo hàm Logarit. *Cho f làm một hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$, và k là một số nguyên dương. Khi đó*

$$\|m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) = o(T(r, f))$$

(trong phần này, ta dùng kí hiệu $\|P$ để chỉ mệnh đề P đúng với mọi r đủ lớn, ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.

Định lí cơ bản thứ nhất. *Cho f là một hàm phân hình trên $\mathbb{C}$ và a là một số phức. Khi đó*

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) + O(1).$$

Định lí cơ bản thứ hai. *Cho f là một hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$, và $a_1, \ldots, a_q$ là q giá trị trong $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, đôi một phân biệt. Khi đó*

$$(q-2)T(r, f) \leqslant \sum_{i=1}^{q} \overline{N}_{f-a_i}(r) + o(T(r, f)),$$

2.2 Tiêu chuẩn họ chuẩn tắc kiểu Montel

Khái niệm họ chuẩn tắc các hàm phân hình được đưa ra bởi Montel năm 1912.

Định nghĩa 2.1. Họ hàm chuẩn tắc Một họ $\mathcal{F}$ các hàm phân hình trên một miền $D \subset \mathbb{C}$ được gọi là chuẩn tắc nếu mọi dãy $\{f_v\} \subset \mathcal{F}$ đều tồn tại dãy con $\{f_{v_i}\}$ hội tụ đều theo metric cầu trên các tập con compact của D tới một hàm phân hình hoặc hàm đồng nhất bằng ∞.

Họ $\mathcal{F}$ được gọi là chuẩn tắc tại điểm $z_0 \in D$ nếu tồn tại hình tròn $\{z : |z - z_0| < \epsilon\} \subset D$ sao cho họ $\mathcal{F}$ (hạn chế trên $\{z : |z - z_0| < \epsilon\}$) là chuẩn tắc trên $\{z : |z - z_0| < \epsilon\}$. Như vậy, họ $\mathcal{F}$ là chuẩn tắc trên D khi và chỉ khi nó chuẩn tắc tại mọi điểm thuộc D.

Với mỗi hàm phân hình f trên một miền $D \subset \mathbb{C}$, ta ký hiệu $f^{\#}$ là đạo hàm cầu của f, $f^{\#} = \frac{|f'|}{1+|f|^2}$. Tiêu chuẩn sau cho họ chuẩn tắc được Marty thiết lập năm 1957.

Định lý 2.1. *(Định lý Marty) Một họ $\mathcal{F}$ gồm các hàm phân hình trên miền $D \subset \mathbb{C}$ là chuẩn tắc nếu và chỉ nếu đạo hàm cầu của các hàm trong $\mathcal{F}$ bị chặn đều trên các tập con compact của D, có nghĩa, với mỗi tập con compact K của D, tồn tại hằng số dương $c(K)$ sao cho*

$$f^{\#}(z) = \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \leq c(K)$$

với mọi $z \in K$ và $f \in \mathcal{F}$.

Theo nguyên lý Bloch, mỗi định lý dạng Picard bé (về hàm, ánh xạ hằng) đều tương ứng với một tiêu chuẩn về họ chuẩn tắc. Như vậy, với việc có thể tạo ra các dạng Định lý Picard bé, Lý thuyết Nevanlinna tham gia được vào bài toán về họ chuẩn tắc. Bổ đề sau đây của Zalcman có vai trò quan trọng trong việc triển khai ý tưởng của Bloch.

Bổ đề 2.1 (Bổ đề Zalcman cho họ các hàm phân hình)**.** (Bổ đề Zalcman) Họ $\mathcal{F}$ các hàm phân hình trên đĩa đơn vị $\mathbb{D}$ trong $\mathbb{C}$ là không chuẩn tắc tại z_0 nếu và chỉ nếu tồn tại

1) số thực r, $0 < r < 1$,
2) các điểm z_n, $|z_n| < r$, $z_n \to z_0$,
3) dãy số thực dương $\rho_n \to 0^+$,
4) các hàm $f_n \in \mathcal{F}$

sao cho

$$g_n(\xi) = f_n(z_n + \rho_n \xi) \to g(\xi)$$

hội tụ đều trên các tập con compact của $\mathbb{C}$ theo metric cầu, ở đó $g(\xi)$ là một hàm phân hình khác hằng và $g^{\#}(\xi) \leqslant g^{\#}(0) = 1$.

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{F}$ không chuẩn tắc trên $\mathbb{D}$. Khi đó, theo Định lý Marty, tồn tại số r^*, $0 < r^* < 1$, dãy các điểm z_n^* ($n \in \mathbb{N}$) trong đĩa $\{z : |z| \leq r^*\}$ và các hàm $f_n \in \mathcal{F}$ sao cho $f_n^{\#}(z_n^*) \to +\infty$. Cố định một giá trị r sao cho $r^* < r < 1$, và với mỗi $n \in \mathbb{N}$ đặt

$$M_n = \max_{z:|z|\leq r} \left(1 - \frac{|z|^2}{r^2}\right) f_n^{\#}(z) = \left(1 - \frac{|z_n|^2}{r^2}\right) f_n^{\#}(z_n), \tag{2.1}$$

với z_n nào đó thuộc đĩa $\{z : |z| \le r\}$ mà ở đó giá trị lớn nhất nói trên là đạt được (để ý rằng $f^{\#}$ liên tục trên $\{z : |z| \le r\}$).
Ta có $M_n \to +\infty$. Đặt

$$\rho_n = \frac{1}{M_n}\left(1 - \frac{|z_n|^2}{r^2}\right) = \frac{1}{f_n^{\#}(z_n)}. \tag{2.2}$$

Ta có

$$\frac{\rho_n}{r - |z_n|} = \frac{r + |z_n|}{r^2 M_n} \le \frac{2}{r M_n} \to 0. \tag{2.3}$$

Vì vậy các hàm $g_n(\xi) = f_n(z_n + \rho_n \xi)$ xác định trên đĩa $\{\xi \le R_n\}$ với

$$R_n = \frac{r - |z_n|}{\rho_n} \to +\infty.$$

Từ (2.2) ta có $g_n^{\#}(0) = \rho_n f_n^{\#}(z_n) = 1$.
Với $|\xi| \le R < R_n$ và $|z_n + \rho_n\xi| < r$ từ (2.1) và (2.2) ta có

$$\begin{aligned} g_n^{\#}(\xi) = \rho_n f_n^{\#}(z_n + \rho_n \xi) &\le \frac{\rho_n M_n}{1 - \frac{|z_n + \rho_n \xi|^2}{r^2}} \\ &\le \frac{r + |z_n|}{r + |z_n + \rho_n\xi|} \cdot \frac{r - |z_n|}{r - |z_n| - \rho_n R} \\ &\le \frac{r + |z_n|}{r} \cdot \frac{r - |z_n|}{r - |z_n| - \rho_n R}. \end{aligned}$$

Trong biểu thức cuối, nhân tử đầu không vượt quá 2, nhân tử thứ hai tiến tới 1 khi $n \to +\infty$ do (2.3). Vì vậy, theo Định lý Marty, họ $\{g_n\}$ (n đủ lớn để từ đó $R_n > R$) chuẩn tắc trên $\{\xi : |\xi| < R\}$, với mọi $R > 0$. Do đó, bằng cách chọn dãy con và bằng quy tắc đường chéo, ta có thể giả sử g_n hội tụ đều trên các tập con compact của $\mathbb{C}$ theo metric cầu đến một hàm phân hình g. Rõ ràng g khác hằng vì $g^{\#}(0) = \lim g_n^{\#}(0) = 1 \ne 0$.

Bây giờ ta chứng minh chiều ngược lại của Bổ đề. Giả sử các điều kiện 1)-4) được thỏa mãn, nhưng họ $\mathcal{F}$ là chuẩn tắc. Khi đó, theo Định lý Marty, tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\max_{|z| \le \frac{1+r}{2}} f^{\#}(z) \le M$$

với mọi $f \in \mathcal{F}$.

Với mỗi $\xi \in \mathbb{C}$, do $z_n + \rho_n \xi$ hội tụ tới một điểm thuộc đĩa $\{z : |z| \leq r\}$ nên $|z_n + \rho_n \xi| \leq \frac{1+r}{2}$ với mọi n đủ lớn. Do đó với mọi $\xi \in \mathbb{C}$, ta có

$$g^{\#}(\xi) = \lim \rho_n f_n^{\#}(z_n + \rho_n \xi) = 0.$$

Điều này không thể xảy ra vì g là khác hằng. $\square$

Năm 1998, Zalcman đã cải tiến Bổ đề trên như sau:

Bổ đề 2.2 (Bổ đề Zalcman)**.** Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên đĩa đơn vị $\mathbb{D}$. Khi đó $\mathcal{F}$ không chuẩn tắc tại $z_0 \in \mathbb{D}$, khi và chỉ khi với mỗi α, thỏa mãn $-1 < \alpha < 1$, tồn tại

1) số thực r, $0 < r < 1$,
2) các điểm z_n, $|z_n| < r$, $z_n \to z_0$,
3) dãy số thực dương $\rho_n \to 0^+$,
4) các hàm $f_n \in \mathcal{F}$

sao cho

$$g_n(\xi) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^{\alpha}} \to g(\xi)$$

hội tụ đều trên các tập con compact của $\mathbb{C}$ theo metric cầu, ở đó $g(\xi)$ làm một hàm phân hình khác hằng thỏa mãn $g^{\#}(\xi) \leqslant g^{\#}(0) = 1$ và có bậc không lớn hơn 2.

Cùng với việc đưa ra khái niệm họ chuẩn tắc các hàm phân hình, năm 1912, Montel đã đưa ra tiêu chuẩn nổi tiếng sau cho họ chuẩn tắc.

Định lý 2.2. *Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên một miền $D \subset \mathbb{C}$, và cho a_1, a_2, a_3 là ba điểm phân biệt trong $\widehat{\mathbb{C}}$. Giả sử rằng tất cả các hàm trong $\mathcal{F}$ đều không nhận các giá trị a_1, a_2, a_3, có nghĩa $f(z) - a_j \neq 0$ với mọi $z \in D$, $f \in \mathcal{F}$, $j \in \{1, 2, 3\}$. Khi đó $\mathcal{F}$ là một họ chuẩn tắc.*

Năm 1916, Montel mở rộng kết quả trên tới trường hợp các hàm trong $\mathcal{F}$ có thể nhận các giá trị a_1, a_2, a_3 với bội đủ lớn.

Định lý 2.3. *Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên một miền $D \subset \mathbb{C}$, và cho a_1, a_2, a_3 là ba điểm phân biệt trong $\widehat{\mathbb{C}}$. Giả sử tồn tại các số nguyên* *dương (có thể là $+\infty$) ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 thỏa mãn*

$$\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} + \frac{1}{\ell_3} < 1$$

và với mỗi $f \in \mathcal{F}$, mọi không điểm của $f - a_i$ có bội ít nhất ℓ_i, với mọi $i \in \{1, 2, 3\}$. Khi đó $\mathcal{F}$ là một họ chuẩn tắc.

Được truyền cảm hứng từ các tiêu chuẩn trên của Montel, trong hơn 100 năm qua nhiều tiêu chuẩn cho họ chuẩn tắc đã được thiết lập. Ta điểm qua một vài kết quả trong số đó. Năm 1929, Valiron mở rộng kết quả của Montel tới trường hợp q điểm $a_1, a_2, \ldots, a_q$ với các số tự nhiên tương ứng $\ell_1, \ldots, \ell_q$ thỏa mãn $\sum_{j=1}^{q} \dfrac{1}{\ell_j} < q - 2$. Carathéodory mở rộng kết quả của Montel tới trường hợp mà ở đó bộ ba điểm (a_1, a_2, a_3) có thể thay đổi theo hàm f tương ứng thuộc họ $\mathcal{F}$. Năm 2014 Grahl và Nevo tiếp tục mở rộng kết quả của Carathéodory tới trường hợp mà các điểm a_1, a_2, a_3 được thay thế bởi các hàm.

Định lý 2.4. *Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên một miền $D \subset \mathbb{C}$ và cho $\epsilon > 0$. Giả sử với mỗi $f \in \mathcal{F}$ tồn tại các hàm phân hình (hoặc giá trị ∞) a_f, b_f, c_f sao cho f không nhận mỗi a_f, b_f, c_f trên D và*

$$\min\{\sigma(a_f(z), b_f(z)), \sigma(b_f(z), c_f(z)), \sigma(c_f(z), a_f(z))\} \geq \epsilon,$$

với mọi $z \in D$. Khi đó $\mathcal{F}$ là một họ chuẩn tắc. Ở đây, ta ký hiệu σ là khoảng cách cầu trên $\widehat{\mathbb{C}}$.

Như vậy, các tiêu chuẩn chuẩn tắc nói trên chỉ có thể áp dụng đối với trường hợp đạo hàm (tới cấp đủ lớn) triệt tiêu. Trong khi đó, theo Định lý Marty, vấn đề chuẩn tắc liên quan tới điều kiện bị chặn đều (chứ không chỉ là triệt tiêu) của đạo hàm. Từ thực tế đó, Trần Văn Tấn, Nguyễn Văn Thìn và Vũ Văn Trường [4] đã tổng quát các tiêu chuẩn cho họ chuẩn tắc nói trên tới trường hợp đạo hàm cầu bị chặn.

Định lý 2.5. *Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên miền $D \subset \mathbb{C}$. Giả sử với mỗi tập con compact $K \subset D$, tồn tại*

i) các số nguyên dương (có thể bằng $+\infty$) $\ell_1, \ldots, \ell_q$ thỏa mãn $\sum_{j=1}^{q} \dfrac{1}{\ell_j} < q - 2$, *ii) các hàm phân hình $a_{1f}, \ldots, a_{qf}$ $(f \in \mathcal{F})$ trên D, và các số dương ϵ, M sao cho $\sigma(a_{if}(z), a_{jf}(z)) \geq \epsilon$ với mọi $z \in D$, $1 \leq i, j \leq q, i \neq j$ và*

$$\sup_{z \in K: f(z)=a_{jf}(z) \neq \infty} (f^{(k)})^{\#}(z) \leq M, \qquad \sup_{z \in K: f(z)=a_{jf}(z)=\infty} \left(\left(\frac{1}{f}\right)^{(k)}\right)^{\#}(z) \leq M,$$

với mọi $f \in \mathcal{F}$, $j \in \{1, \ldots, q\}$, và $k = 0, \ldots, \ell_j - 2$.
Khi đó $\mathcal{F}$ là chuẩn tắc.

Để chứng minh định lý trên, ta cần Bổ đề sau của Grahl-Nevo.

Bổ đề 2.3. Cho $\{a_\alpha, b_\alpha\}_{\alpha \in I}$ là một họ các cặp hàm phân hình trên một miền $D \subset \mathbb{C}$. Giả sử tồn tại hằng số dương ϵ sao cho $\sigma(a_\alpha(z), b_\alpha(z)) \geq \epsilon$ với mọi $\alpha \in I$ và mọi $z \in D$. Khi đó các họ $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ và $\{b_\alpha\}_{\alpha \in I}$ là chuẩn tắc.

Chứng minh Định lý 2.5. Không mất tính tổng quát, giả sử D là đĩa đơn vị $\mathbb{D}$. Giả sử $\mathcal{F}$ không chuẩn tắc tại $z_0 \in \mathbb{D}$. Khi đó, theo Bổ đề 2.2, với $\alpha = 0$ tồn tại

1) số thực r, $0 < r < 1$,
2) các điểm z_v, $|z_v| < r$, $z_v \to z_0$,
3) các số thực dương $\rho_v \to 0^+$,
4) các hàm $f_v \in \mathcal{F}$

sao cho

$$g_v(\xi) = f_v(z_v + \rho_v \xi) \to g(\xi) \tag{2.4}$$

hội tụ đều trên các tập con compact thuộc $\mathbb{C}$, với g là một hàm phân hình khác hằng.
Khi đó với mỗi $j \in \mathbb{N}$, ta có

$$g_v^{(j)} \to g^{(j)} \quad \text{đều trên các tập con compact của } \mathbb{C} \setminus P, \text{ và} \tag{2.5}$$

$$\left(\frac{1}{g_v}\right)^{(j)} \to \left(\frac{1}{g}\right)^{(j)} \text{ đều trên các tập con compact của } \mathbb{C} \setminus Z \tag{2.6}$$

theo metric Euclid, với P, Z lần lượt là các tập không điểm, cực điểm của g.

Lấy $K := \{z : |z| \leq \frac{1+|z_0|}{2}\} \subset \mathbb{D}$, theo giả thiết, tồn tại

i) các số nguyên dương (có thể bằng $+\infty$), $\ell_1, \ldots, \ell_q$ thỏa mãn $\sum_{j=1}^{q} \dfrac{1}{\ell_j} < q-2$,

ii) các hàm phân hình $a_{1f_v}, \ldots, a_{qf_v}$ $(f \in \mathcal{F})$ trên $\mathbb{D}$, và các số thực dương ϵ và M sao cho $\sigma(a_{if_v}(z), a_{jf_v}(z)) \geq \epsilon$ với mọi $z \in \mathbb{D}$, $1 \leq i, j \leq q, i \neq j$, và

$$\sup_{z \in K: f_v(z) = a_{jf_v}(z) \neq \infty} (f_v^{(k)})^{\#}(z) \leq M, \qquad \sup_{z \in K: f_v(z) = a_{jf_v}(z) = \infty} \left(\left(\frac{1}{f_v} \right)^{(k)} \right)^{\#} (z) \leq M,$$

với mọi $v \geq 1$, $j \in \{1, \ldots, q\}$, và mọi $k = 0, \ldots, \ell_j - 2$.
Bỏ qua bất kỳ $\ell_j = 1$, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $q \geq 3$ và $\ell_j \geq 2$ với mọi $j = 1, \ldots, q$.
Từ Bổ đề 2.3, ta có thể giả sử $\{a_{jf_v}\}_{v \geq 1}$ hội tụ đều trên các tập con compact của $\mathbb{C}$ theo metric cầu tới hàm phân hình a_j (hoặc ∞) với mọi $j = 1, \ldots, q$. Khi đó $A_{jv}(\xi) := a_{jf_v}(z_v + \rho_v \xi)$ hội tụ đều trên các tập con compact của $\mathbb{C}$ tới hằng số $a_j(z_0)$. Từ giả thiết về khoảng cách cầu giữa các cặp điểm thuộc $\{a_{1f_v}(z), \ldots, a_{qf_v}(z)\}$ ta có $a_1(z_0), \ldots, a_q(z_0)$ đôi một phân biệt.

Bây giờ ta chứng minh khẳng định sau: Với mỗi $j \in \{1, \ldots, q\}$, nếu $a_j(z_0) \neq \infty$ thì mọi không điểm của $g - a_j(z_0)$ có bội ít nhất ℓ_j.

Cố định một chỉ số j bất kỳ. Với không điểm ξ_0 bất kỳ của $g(\xi) - a_j(z_0)$, do $a_j(z_0) \neq \infty$, nên g chỉnh hình tại ξ_0. Theo Định lý Hurwitz, tồn tại các giá trị ξ_v (với mỗi v đủ lớn) $\xi_v \to \xi_0$ sao cho $A_{jv}(\xi_v) \neq \infty$ và

$$f_v(z_v + \rho_v \xi_v) - a_{jf_v}(z_v + \rho \xi_v) = g_v(\xi_v) - A_{jv}(\xi_v) = 0.$$

Để ý rằng $z_0 \in \overset{\circ}{K}$, nên $z_v + \rho_v \xi_v \in K$ với mọi v đủ lớn. Từ $a_{jf_v}(z_v + \rho \xi_v) \to a_j(z_0) \neq \infty$, ta có thể giả sử rằng

$$|f_v(z_v + \rho_v \xi_v)| = |a_{jf_v}(z_v + \rho \xi_v)| \leq 1 + |a_j(z_0)|. \tag{2.7}$$

Ta có

$$\frac{|f_v^{(k+1)}(z_v + \rho_v \xi_v)|}{1 + |f_v^{(k)}(z_v + \rho_v \xi_v)|^2} \leq M, \tag{2.8}$$

với mọi $k = 0, \ldots, \ell_j - 2$ và với mọi v đủ lớn.

Đặt $M_1 := M \cdot (1 + (1 + |a_j(z_0)|)^2)$, và $M_{n+1} := M \cdot (1 + M_n^2)$, với mỗi số nguyên dương n.
Ta chứng minh bất đẳng thức sau bằng quy nạp:

$$\left| f_v^{(k)}(z_v + \rho_v \xi_v) \right| \leq M_k, \quad \text{với mọi } k = 1, \ldots \ell_j - 1. \tag{2.9}$$

Thật vậy, với $k = 1$, do (2.8) ta có

$$\frac{|f_v'(z_v + \rho_v \xi_v)|}{1 + |f_v(z_v + \rho_v \xi_v)|^2} \leq M.$$

Kết hợp với (2.7), ta có

$$|f_v'(z_v + \rho_v \xi_v)| \leq M \cdot \Big(1 + |f_v(z_v + \rho_v \xi_v)|^2 \Big) \leq M \cdot \big(1 + (1 + |a_j(z_0)|)^2 \big) = M_1.$$

Vậy ta nhận được (2.9) đối với $k = 1$.

Giả sử (2.9) đúng với k $(k \leq \ell_j - 2)$. Khi đó, từ (2.8) và giả thiết quy nạp, ta có

$$\begin{aligned} |f_v^{(k+1)}(z_v + \rho_v \xi_v)| &\leq M \cdot \Big(1 + |f_v^{(k)}(z_v + \rho_v \xi_v)|^2 \Big) \\ &\leq M \cdot \big(1 + M_k^2 \big) = M_{k+1}. \end{aligned}$$

Vậy, theo nguyên lý quy nạp, ta nhận được (2.9).
Do (2.9) ta có

$$\begin{aligned} \frac{|g_v^{(k)}(\xi_v)|}{1 + |g_v^{(k-1)}(\xi_v)|^2} &= \rho_v^k \cdot \frac{|f_v^{(k)}(z_v + \rho_v \xi_v)|}{1 + \rho_v^{2(k-1)} |f_v^{(k-1)}(z_v + \rho_v \xi_v)|^2} \\ &\leq \rho_v^k \cdot |f_v^{(k)}(z_v + \rho_v \xi_v)| \\ &\leq \rho_v^k \cdot M_k, \quad \text{với mọi} \quad k = 1, \ldots \ell_j - 1. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Do đó, từ $g_v^{(k-1)}(\xi_v) \to g^{(k-1)}(\xi_0) \neq \infty$, ta có

$$0 \leq |g^{(k)}(\xi_0)| = \lim_{v \to \infty} |g_v^{(k)}(\xi_v)| \leq \lim_{v \to \infty} \rho_v^k \cdot M_k \cdot (1 + |g_v^{(k-1)}(\xi_v)|^2) = 0.$$

Vậy, $g^{(k)}(\xi_0) = 0$ với mọi $k = 1, \ldots, \ell_j - 1$. Do đó không điểm ξ_0 của $g - a_j(z_0)$ có bội ít nhất ℓ_j. Ta nhận được khẳng định nêu trên.

Nếu tồn tại $j \in \{1, \ldots, q\}$, sao cho $a_j(z_0) = \infty$, khi đó $\frac{1}{A_v}(\xi) := \frac{1}{a_j f_v(z_v + \rho_v \xi)}$ hội tụ đều trên các tập con compact của $\mathbb{D} \setminus \{z : a_j(z) = 0\}$

theo metric Euclid tới 0. Do đó, từ (2.5), với một lập luận tương tự như trên, ta cũng có mọi không điểm của $\frac{1}{g}$ (nói cách khác cực điểm của g) có bội ít nhất ℓ_j.
Bây giờ áp dụng các định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai ta có:

$$\begin{aligned} \Big\| \quad (q-2)T_g(r) &\leq \sum_{j=1}^{q} N^{[1]}_{g-a_j(z_0)}(r) + o(T_g(r)) \\ &\leq \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{\ell_j} N_{g-a_j(z_0)}(r) + o(T_g(r)) \\ &\leq \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{\ell_j} T_g(r) + o(T_g(r)). \end{aligned}$$

Điều này trái với giả thiết

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{1}{\ell_j} < q-2.$$

Do đó, $\mathcal{F}$ là một họ chuẩn tắc. $\square$

Chú ý rằng tiêu chuẩn chuẩn tắc nói trên chỉ áp dụng cho các trường hợp mà $q \geq 3$. Sau đây chúng ta đề cập tới các trường hợp $q = 2$ và $q = 1$.

Năm 1959, Hayman thiết lập một dạng của Định lý cơ bản thứ hai cho đa thức đạo hàm, nó kéo theo một dạng Định lý Picard cho trường hợp tránh hai điểm: Nếu f là một hàm phân hình siêu việt trên mặt phẳng phức thì hoặc f nhận mọi giá trị hữu hạn vô hạn lần hoặc đạo hàm $f^{(k)}, k \geq 1$, nhận mọi giá trị hữu hạn khác 0 vô hạn lần. Tiêu chuẩn chuẩn tắc ứng với Định lý Hayman được đưa ra bởi Gu năm 1979.

Định lý 2.6. *Cho k là một số nguyên dương và $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình f trên một miền $D \subset \mathbb{C}$ sao cho f và $f^{(k)} - 1$ không có không điểm trên D. Khi đó $\mathcal{F}$ là chuẩn tắc.*

Năm 2005, Bergweiler và Langley mở rộng kết quả của Gu tới trường hợp mà các hàm f và $f^{(k)} - 1$ có thể có không điểm, nhưng với bội đủ lớn.

Định nghĩa 2.2. Cho k, M, N là các số nguyên dương (M, N có thể nhận giá trị $+\infty$) và cho $D \subset \mathbb{C}$ là một miền.

1. Ký hiệu $\mathcal{F}(k, M, N, D)$ là tập các hàm phân hình f trên D sao cho mọi không điểm của f có bội ít nhất M, và mọi không điểm của $f^{(k)} - 1$ có bội ít nhất N.

2. Cho c là một hằng số dương. Ký hiệu $\widetilde{\mathcal{F}}(k, M, N, c, D)$ là tập các hàm phân hình f trên D sao cho

$$\sup\left\{\left(f^{(i)}\right)^{\#}(z) : z \in f^{-1}(0)\right\} \le c$$

với mọi $i = 0, \ldots, M-2$, và

$$\sup\left\{\left(f^{(k+\ell)}\right)^{\#}(z) : z \in \left(f^{(k)}\right)^{-1}(1)\right\} \le c$$

với mọi $\ell = 0, \ldots, N-2$.

Định lý 2.7 (Bergweiler-Langley)**.** *a) Nếu* $\frac{2k+3+2/k}{M} + \frac{(2+2/k)(k+1)}{N} < 1$ *thì* $\mathcal{F}(k, M, N, \mathbb{C})$ *chỉ gồm các hàm hằng.*

b) Họ $\mathcal{F}(k, M, N, D)$ *là chuẩn tắc khi và chỉ khi* $\mathcal{F}(k, M, N, \mathbb{C})$ *chỉ gồm các hàm hằng.*

Trần Văn Tấn, Nguyễn Văn Thìn và Vũ Văn Trường [4] đã mở rộng kết quả trên của Bergweiler và Langley tới hợp đạo hàm bị chặn (thay vì đạo hàm triệt tiêu) như sau:

Định lý 2.8. *Nếu* $\mathcal{F}(k, M, N, \mathbb{C})$ *chỉ chứa các hàm hằng thì* $\widetilde{\mathcal{F}}(k, M, N, c, D)$ *là chuẩn tắc.*

Chứng minh. Phép chứng minh Định lý 2.8 là tương tự Định lý 2.5:

Ta cũng có thể coi D là đĩa đơn vị $\mathbb{D}$. Giả sử $\mathcal{F}(k, M, N, \mathbb{C})$ chỉ chứa các hàm hằng, trong khi $\widetilde{\mathcal{F}}(k, M, N, c, \mathbb{D})$ không chuẩn tắc tại $z_0 \in \mathbb{D}$. Khi đó, theo Bổ đề 2.2, với $\alpha = 0$ tồn tại

1) số thực r, $0 < r < 1$,

2) các điểm z_v, $|z_v| < r$, $z_v \to z_0$,

3) dãy các số dương $\rho_v \to 0^+$,

4) các hàm $f_v \in \widetilde{\mathcal{F}}(k, M, N, c, \mathbb{D})$

sao cho

$$g_v(\xi) = f_v(z_v + \rho_v \xi) \to g(\xi)$$

hội tụ đều trên các tập con compact của $\mathbb{C}$ tới một hàm phân hình khác hằng g.

Khi đó tương tự phép chứng minh Định lý 2.5, ta có: Mọi không điểm của g có bội ít nhất M và mọi không điểm của $g^{(k)} - 1$ có bội ít nhất N. Khi đó, $g \in \mathcal{F}(k, M, N, \mathbb{C})$; điều này không thể xảy ra. $\square$

Ứng với trường hợp các hàm chỉnh hình tránh 1 giá trị, năm 1999, Pang và Zalcman đạt được kết quả sau:

Định lý 2.9. *Cho n và k là các số nguyên dương và cho $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm chỉnh hình trên một miền $D \subset \mathbb{C}$ mà mọi không điểm có bội không bé hơn k. Giả sử với mọi $f \in \mathcal{F}$ thì $f^n f^{(k)} - a$ không có không điểm, Khi đó, $\mathcal{F}$ là chuẩn tắc.*

Lưu ý rằng kết quả trên của Pang và Zalcman là đối với họ các hàm chỉnh hình, do đó nếu nhìn chúng như các hàm phân hình định lý cũng đòi hỏi $f^n f^{(k)}$ tránh hai giá trị. Năm 2014, Trần Văn Tấn và Nguyễn Văn Thìn đã mở rộng kết quả trên tới trường hợp hàm phân hình và đạo hàm cầu bị chặn như sau:

Định lý 2.10. *Cho n, k là các số nguyên dương thỏa mãn $n > k + 3 + \frac{2}{k}$. Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên một miền $D \subset \mathbb{C}$ mà các không điểm có bội ít nhất k. Giả sử với mỗi tập con compact $K \subset D$, tồn tại $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ và hằng số dương $M = M(K)$ sao cho $(f^n f^{(k)})^{\#}(z) \leq M$ với mọi $f \in \mathcal{F}$ và $z \in K \cap \{f^n f^{(k)} = a\}$. Khi đó $\mathcal{F}$ là chuẩn tắc.*

Chứng minh. Ta có thể giả sử D là đĩa đơn vị $\mathbb{D}$. Giả sử họ $\mathcal{F}$ không chuẩn tắc tại $z_0 \in \mathbb{D}$. Theo Bổ đề 2.2, với $\alpha = \dfrac{k}{n+1}$ tồn tại

1) số thực r, $0 < r < 1$,

2) dãy các điểm z_v, $|z_v| < r$, $z_v \to z_0$,

3) dãy các số $\rho_v \to 0^+$,

4) các hàm $f_v \in \mathcal{F}$
sao cho

$$g_v(\xi) := \frac{f_v(z_v + \rho_v \xi)}{\rho_v^{\alpha}} \to g \tag{2.11}$$

hội tụ đều trên các tập con compact của $\mathbb{C}$, tới hàm phân hình khác hằng g mà các không điểm có bội ít nhất k, $g^{\#}(\xi) \leq g^{\#}(0) \leq 1$.
Mặt khác,

$$g_v^{(j)}(\xi) = \left(\frac{f_v(z_v + \rho_v \xi)}{\rho_v^{\alpha}}\right)^{(j)} = \frac{1}{\rho_v^{\alpha - j}} f_v^{(j)}(z_v + \rho_v \xi) \quad \text{với mọi} \quad j \in \mathbb{N}.$$

Do đó, từ (2.11), ta có

$$g_v^n(\xi) g_v^{(k)}(\xi) = f_v^n(z_v + \rho_v \xi) f_v^{(k)}(z_v + \rho_v \xi) \to g^n(\xi) g^{(k)}(\xi) \tag{2.12}$$

hội tụ đều trên các tập con compact của $\mathbb{C} \setminus P$, ở đó P là tập các bội của g.

Trước hết ta chứng minh: $g^n g^{(k)}$ khác hằng.
Do g khác hằng và mọi không điểm có bội ít nhất k, ta dễ dàng nhận thấy $g^{(k)} \not\equiv 0$. Do đó, $g^n g^{(k)} \not\equiv 0$.

Giả sử $g^n g^{(k)}$ là hàm hằng (khác không). Khi đó, do $n \geq 1$, nên g là một hàm nguyên không đâu triệt tiêu. Mặt khác do g có đạo hàm cầu bị chặn nên g có bậc không vượt quá 1. Do đó $g(\xi) = e^{c\xi + d}$, $c \neq 0$. Khi đó

$$g^n(\xi) g^{(k)}(\xi) = e^{nc\xi + nd} c^k e^{c\xi + d} = c^k e^{(n+1)c\xi + (n+1)d}.$$

Vì vậy $c^k e^{(n+1)c\xi + (n+1d}$ là một hàm hằng; điều này không xảy ra. Vậy $g^n g^{(k)}$ khác hằng.

Lấy $K := \{z : |z| \leq \frac{1 + |z_0|}{2}\} \subset D$, khi đó, từ giả thiết tồn tại $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ và hằng số dương M sao cho $(f^n f^{(k)})^{\#}(z) \leq M$ với mọi $f \in \mathcal{F}$ và $z \in K \cap (f^n f^{(k)})^{-1}(a)$.

Bây giờ ta chứng minh: Mọi không điểm của $g^n g^{(k)} - a$ có bội ít nhất 2.

Thật vậy, với không điểm ξ_0 tùy ý của $g^n g^{(k)} - a$, thì g chỉnh hình tại ξ_0, nên theo (2.12) và Định lý Hurwitz, tồn tại dãy $\xi_v \to \xi_0$ sao cho

$$(f_v^n f_v^{(k)})(z_v + \rho_v \xi_v) = a.$$

Vì vậy $z_v + \rho_v \xi_v \in K \cap (f_v^n f_v^{(k)})^{-1}(a)$, với mọi v đủ lớn.

Từ giả thiết, ta có

$$\frac{|(f_v^n f_v^{(k)})'(z_v + \rho_v \xi_v)|}{1 + |(f_v^n f_v^{(k)})(z_v + \rho_v \xi_v)|^2} \leq M.$$

Do đó,

$$\frac{|(g_v^n g_v^{(k)})'(\xi_v)|}{1 + |(g_v^n g_v^{(k)})(\xi_v)|^2} = \rho_v \frac{|(f_v^n f_v^{(k)})'(z_v + \rho_v \xi_v)|}{1 + |(f_v^n f_v^{(k)})(z_v + \rho_v \xi_v)|^2} \leq M\rho_v. \tag{2.13}$$

Kết hợp với (2.12), ta được

$$(g^n g^{(k)})^{\#}(\xi_0) = \lim_{v \to \infty} (g_v^n g_v^{(k)})^{\#}(\xi_v) = 0.$$

Vậy $(g^n g^{(k)})'(\xi_0) = 0$.
Do đó ξ_0 là một không điểm của $g^n g^{(k)} - a$ với bội ít nhất 2.
Ta viết

$$\frac{1}{|g(z)|^{n+1}} = \frac{1}{|g^n(z) g^{(k)}(z)|} \cdot \frac{|g^{(k)}(z)|}{|g(z)|}.$$

Do đó

$$\log^+ \frac{1}{|g(z)|^{n+1}} \leqslant \log^+ \frac{1}{|g^n(z) g^{(k)}(z)|} + \log^+ \left|\frac{g^{(k)}(z)}{g(z)}\right| + \log 2.$$

Vì vậy, theo Bổ đề đạo hàm Logarit và Định lý cơ bản thứ nhất, ta có

$$\begin{aligned} \Big\| \quad (n+1)m(r, \frac{1}{g}) &\leqslant m(r, \frac{1}{g^n g^{(k)}}) + o(T_g(r)) \\ &= T_{\frac{1}{g^n g^{(k)}}}(r) - N_{g^n g^{(k)}}(r) + o(T_g(r)) \\ &= T_{g^n g^{(k)}}(r) - N_{g^n g^{(k)}}(r) + o(T_g(r)). \end{aligned}$$

Mặt khác, theo Định lý cơ bản thứ hai, ta có:

$$\Big\| \quad T_{g^n g^{(k)}}(r) \leqslant N^{[1]}_{g^n g^{(k)}}(r) + N^{[1]}_{\frac{1}{g^n g^{(k)}}}(r) + N^{[1]}_{g^n g^{(k)} - a}(r) + o(T_g(r).$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \Big\| \quad (n+1)m(r, \frac{1}{g}) \leq N^{[1]}_{g^n g^{(k)}}(r) + N^{[1]}_{\frac{1}{g^n g^{(k)}}}(r) &+ N^{[1]}_{g^n g^{(k)} - a}(r) \\ &- N_{g^n g^{(k)}}(r) + o(T_g(r)). \end{aligned}$$

Do đó, theo Định lý cơ bản thứ nhất, ta có:

$$\begin{aligned}
\Big\| \quad (n+1)T_g(r) &= (n+1)T_{\frac{1}{g}}(r) + O(1) \\
&= (n+1)m(r, \frac{1}{g}) + (n+1)N_g(r) + O(1) \\
&\leqslant N^{[1]}_{g^n g^{(k)}}(r) + N^{[1]}_{\frac{1}{g^n g^{(k)}}}(r) + N^{[1]}_{g^n g^{(k)}-a}(r) \\
&\qquad + (n+1)N_g(r) - N_{g^n g^{(k)}}(r) + o(T_g(r). \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Bằng cách đếm không điểm, ta dễ dàng thu được

$$N^{[1]}_{g^n g^{(k)}}(r) + (n+1)N_g(r) - N_{g^n g^{(k)}}(r) \leq (k+1)N^{[1]}_g(r).$$

Kết hợp với (2.14) ta có

$$\begin{aligned}
\Big\| \quad (n+1)T_g(r) &\leq N^{[1]}_{\frac{1}{g^n g^{(k)}}}(r) + N^{[1]}_{g^n g^{(k)}-a}(r) + (k+1)N^{[1]}_g(r) + o(T_g(r)) \\
&= N^{[1]}_{\frac{1}{g}}(r) + N^{[1]}_{g^n g^{(k)}-a}(r) + (k+1)N^{[1]}_g(r) + o(T_g(r)) \\
&\leq T_g(r) + N^{[1]}_{g^n g^{(k)}-a}(r) + (k+1)N^{[1]}_g(r) + o(T_g(r)).
\end{aligned}$$

Mặt khác, mọi không điểm của $g^n g^{(k)} - a$ có bội ít nhất 2. Do đó, áp dụng Bổ đề đạo hàm Logarit, ta có:

$$\begin{aligned}
\Big\| \quad T_g(r) &\leq \frac{k+1}{n}N^{[1]}_g(r) + \frac{1}{n}N^{[1]}_{g^n g^{(k)}-a}(r) + o(T_g(r)) \\
&\leq \frac{k+1}{kn}N_g(r) + \frac{1}{2n}N_{g^n g^{(k)}-a}(r) + o(T_g(r)) \\
&\leq \frac{k+1}{kn}T_g(r) + \frac{1}{2n}T_{g^n g^{(k)}}(r) + o(T_g(r)) \\
&\leq \frac{k+1}{kn}T_g(r) + \frac{n+k+1}{2n}T_g(r) + o(T_g(r)) \\
&\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{(k+1)(k+2)}{2kn}\right)T_g(r) + o(T_g(r)).
\end{aligned}$$

Điều này không xảy ra vì g khác hằng và $n > k + 3 + \frac{2}{k}$.
Vậy $\mathcal{F}$ là một họ chuẩn tắc. $\square$

Kết luận

Luận văn đã đề cập một cách chi tiết, có hệ thống về các nội dung sau:

- Định lí Riemann về sự sự tồn tại ánh xạ song chỉnh hình giữa một miền đơn liên trong mặt phẳng phức với hình tròn đơn vị mở. Để đi tới kết quả này của Riemann, luận văn cũng đã trình bày Định lí Montel về tiêu chuẩn chuẩn tắc của họ hàm chỉnh hình theo điều kiện bị chặn đều trên các tập con compact cũng như Định lí Köbe về họ chuẩn tắc.

- Các định lí Montel về họ chuẩn tắc các hàm phân hình dưới điều kiện về ảnh ngược của một số điểm và một số kết quả gần đây về chủ đề này.

Tài liệu tham khảo

[1] W. Schlag, *A course in complex analysis and Riemann surfaces, American Mathematical Society - Providence*, Rhode Island (Graduate studies in mathematics; volume 154), 2014.

[2] *Bài giảng về Giải tích phức của Alexander Nagel, năm 2009, nguồn internet: http://www.math.wisc.edu/ nagel/Math722Lectures5.pdf"*,

[3] Trần Văn Tấn, *Lí thuyết phân bố giá trị đối với đường cong nguyên trong không gian xạ ảnh phức*, NXB ĐHSP, 2017,

[4] T. V. Tan, and N. V. Thin, and V. V. Truong, *On the normality criteria of Montel and Bergweiler-Langley*, J. Math. Anal. Appl., 448 (2017), 319-325.

[5] T. V. Tan and N. V. Thin, *On Lappan's five-point theorem, Comput. Methods Funct*, Theory 17 (2017), 47-63.

Người hướng dẫn khoa học

PGS. TSKH. Trần Văn Tấn